Δευτέρα 11 Μαρτίου 2013 Κυρτή Ανάλυση

Μάθημα 5

Θεώρημα: $f: C \to \mathbb{R}$ κυρτή, C = ανοιχτό + κυρτό, $C \subseteq \mathbb{R}^d$, $x_0 \in C$.
Η f διαφορίσιμη στο $x_0 \Leftrightarrow \partial f(x_0) = \{u \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq f(x_0) + u\cdot(x-x_0), x \in C\}$ είναι μονοσύνολο

Τότε $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$, $f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0)$

Απόδειξη: Έστω f διαφορ. στο x_0 / f = κυρτή $\partial f(x_0) \neq \emptyset$. Έστω ακόμα $u = u_1 e_1 + \dots + u_d e_d \in \partial f(x_0)$

Τότε $f\big|_{\ell = \{x_0 + te_i : t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)\} \subseteq C}$, f = διαφ. στο x_0, μιας μεταβλητής

$$f(x_0+te_i) \geq f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} t, \quad t \in (-\varepsilon, +\varepsilon), \quad u_i = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}, \ i = 1, \dots, d$$

Άρα για κάθε $u \in \partial f(x_0)$, $u = \nabla f(x_0)$

($\Leftarrow$) Έστω ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο x_0. Τότε θα πρέπει να $\exists\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $f_{x_i}^-(x_0) < f_{x_i}^+(x_0)$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $i = 1$,

$$u_1 = f_{x_1}^-(x_0) < f_{x_1}^+(x_0) = u_1'$$

Τότε $\left.\begin{aligned} f(x_0+te_1) &\geq f(x_0) + u_1 t \\ f(x_0+te_1) &\geq f(x_0) + u_1' t \end{aligned}\right| t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Τότε $\exists u \in \mathbb{R}^d : u \cdot e_1 = u_1 : f(x) \geq f(x_0) + u\cdot(x-x_0) : x \in C$
$\exists u' \in \mathbb{R}^d : u' e_1 = u_1' : f(x) \geq f(x_0) + u'\cdot(x-x_0) : x \in C$

Τότε $u \neq u'$ ενώ $u, u' \in \partial f(x_0)$ = μονοσύνολο

ΑΤΟΠΟ

Άρα, η f είναι διαφορίσιμη στο x_0

Θεώρημα:

$f: C \to \mathbb{R}$ κυρτή, C= ανοιχτό + κυρτό f= διαφορίσιμη. Τότε η f είναι κλάσης C^1.

Απόδειξη:

Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x_0 \in C$ με $x_n \to x_0$ τότε θα αποδείξουμε
$$\nabla f(x_n) \longrightarrow \nabla f(x_0)$$

Έστω $\Gamma = \{x_n : n\in\mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ συμπαγές $\subseteq C$. Τότε $\exists \rho = \rho(\Gamma)$ ώστε $\Delta = \{y \in \mathbb{R}^d : d(y,\Gamma) \leq \rho\} \subseteq C$, Δ -συμπαγές

Τότε η $f|_\Delta$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz,
$$\exists L>0 : |f(y)-f(y')| \leq L\|y-y'\|, \quad y,y' \in \Delta$$
Ξέρουμε ακόμα ότι $f(x) \geq f(x_n) + \nabla f(x_n)\cdot(x-x_n)$ $\forall x \in C$ (από προηγούμενο Θεώρημα)

Έστω $n\in\mathbb{N}$: $\nabla f(x_n) \neq 0$

Έστω $y_n = \underset{\Gamma}{\underset{\uparrow}{x_n}} + \dfrac{\nabla f(x_n)}{\|f(x_n)\|} \in \Delta$

Τότε παίρνουμε
$$\nabla f(x_n)\cdot(y_n-x_n) \leq f(y_n) - f(x_n) \leq |f(y_n)-f(x_n)| \leq L\|y_n-x_n\| = L\rho$$
$$\nabla f(x_n)\cdot(y_n-x_n) = \rho\,\frac{\nabla f(x_n)\cdot\nabla f(x_n)}{\|\nabla f(x_n)\|} = \rho\|\nabla f(x_n)\|$$

Άρα τελικά $\|\nabla f(x_n)\| \leq L$, $n\in\mathbb{N}$ και δείξαμε ότι $f(x_n)$ φραγμένη ακολουθία

Έστω τώρα υπακολουθία της $(\nabla f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ με $\nabla f(x_{k_n}) \to v \in \mathbb{R}$

Τότε $f(x) \geq f(x_{k_n}) + \nabla f(x_{k_n})(x-x_{k_n})$. Τότε αφού f κυρτή έχουμε ότι f συνεχής $\Rightarrow f(x_{k_n}) \to f(x_0)$

Άρα $f(x) \geq f(x_0) + v\cdot(x-x_0) \Rightarrow v \in \partial f(x_0) \Rightarrow v = \nabla f(x_0)$

Θεώρημα Alexandrov: Αν $f: C \to \mathbb{R}$ κυρτή, C = ανοιχτό + κυρτό τότε η f είναι C^2 σχεδόν παντού (Χωρίς Απόδειξη)

2-Διαφορικό

Έστω $g: A \to \mathbb{R}$, A = ανοικτό και υπάρχουν και οι 2-παράγωγοι. Τότε ορίζουμε:

$$d_2 g(x_0)(h) = h^{\perp} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & - & - \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & - & - \\ | & | & - & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}}_{= H(x_0)} h$$

Hessian πίνακας της g στο x_0

Αν οι 2 παράγωγοι είναι συνεχείς, ο $H(x_0)$ είναι συμμετρικός.

Θα λέμε $H(x_0) \geq 0 \iff h^{\perp} H(x_0) h \geq 0, \ h \in \mathbb{R}^d$

$\iff h^{\perp} H(x_0) h \geq 0, \ \|h\| = 1$

ο πίνακας H θετικά ορισμένος

Θεώρημα (Brunn-Hadamard):

$f: C \to \mathbb{R}$, C = ανοιχτό + κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε f κυρτή $\iff H(y) \geq 0, y \in C$

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Έστω ότι $H(y) \geq 0 \ \forall y \in C$. Έστω τώρα $x_0 \in C$. Ξέρουμε ότι

$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \underbrace{\frac{1}{2}(x-x_0)^{\perp} H(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)}_{\geq 0} \geq$ για κάποιο $t \in (0,1)$ (Θεώρημα Taylor)

$\geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0), \ x \in C$.

Δηλαδή στο τυχαίο $x_0 \in C$, η f έχει φέρων υπερεπίπεδο.

Τελικά, f κυρτή αφού το $x_0 \in C$ ήταν τυχόν

($\Longrightarrow$) Έστω τώρα ότι η f είναι κυρτή

Έστω λοιπόν $x_0 \in C$ και $h \in \mathbb{R}^d$ με $\|h\|=1$

Θέτουμε $g(t)=f(x_0+th)$, $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Η g είναι C^2, κυρτή

$g'(t)=\nabla f(x_0+th)\cdot h$

$g''(0)=h^\perp H(x_0)\, h$

Και αφού g κυρτή $\Longrightarrow g''(0)\geq 0 \Longrightarrow h^\perp H(x_0)\, h \geq 0$. Άρα $H(x_0)\geq 0$

Κυρτά Σύνολα

Χρειαζόμαστε στοιχεία από Αφφινική Γεωμετρία

Τοπολογικές ιδιότητες κυρτών συνόλων

Θεωρήματα Καραθεοδωρή, Helly και Radon

Αφφινική Θήκη, Αφφινική διάσταση συνόλου A, $A\neq\emptyset$, $A\subseteq\mathbb{R}^d$

Έστω $a\in A$, $\langle A-a\rangle$ $(0\in A-a)$

Ισχύει: $\langle A-a\rangle = \langle -A+a\rangle$

$\langle A-a\rangle = \langle A-b\rangle \quad \forall\, b\in A$

Άρα ο $H=\langle A-a\rangle$ δεν εξαρτάται από το $a\in A$. Τότε προφανώς $A-a\subseteq H \Longrightarrow A\subseteq \underset{F}{\underset{\|}{a+H}}$. Ορίζουμε $\boxed{\mathrm{aff}(A)=a+\langle A-a\rangle}$

Δηλαδή $\mathrm{aff}(A)$ είναι ένα επίπεδο $\parallel$ στο δ.χ. $H=\langle A-a\rangle$ και $A\subseteq a+H$

Ορίζουμε $\dim_a(A)\equiv \dim_a(\mathrm{aff}(A)) = \dim\langle A-a\rangle$

Σημείωση: Για τυχαίο σύνολο A η αφφινική διάσταση είναι "κακή" διάσταση. Όμως είναι η "γνωστή" (αλγεβρική) διάσταση αν το A είναι κυρτό

Πρόταση: Έστω $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $aff(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum \lambda_i = 1, a_i \in A \right\}$

Απόδειξη:

Έστω $a_1 \in A$. Τότε $aff A = a_1 + \langle A - a_1 \rangle = a_1 + \left\{ \sum_{i=2}^{n} \lambda_i (a_i - a_1), a_i \in A \right\}$

$= \left\{ a_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i (a_i - a), a_i \in A \right\} = \left\{ (1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i) a_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i a_i, \ a_i \in A \right\} =$

$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ a_i \in A \right\}$

Ορισμός: Έστω $A = \{x_1, x_2, .., x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$. Θα λέμε ότι είναι αφφινικά εξαρτημένα $\iff \exists i \in \{1, .., n\} : x_i \in aff(A \setminus \{x_i\})$.
Αλλιώς, λέγονται αφφινικά ανεξάρτητα

Πρόταση: Έστω $A = \{x_1, .., x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$. Τ.Α.Ε.Ι.

(i) Το A είναι αφφινικά εξαρτημένο

(ii) Υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ όχι όλα μηδέν με $\lambda_1 + .. + \lambda_n = 0$ και $\lambda_1 x_1 + .. + \lambda_n x_n = 0$

(iii) Υπάρχει $i \in \{1, 2, .., n\} : \{x_j - x_i, \ j \in \{1, .., n\} \setminus \{i\}\}$ είναι γρ. εξαρτημένα

Απόδειξη

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Έστω ότι $x_1 \in aff(A - \{x_1\})$. Τότε $x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i : \sum_{i=2}^{n} \lambda_i = 1$

$\Rightarrow (-1) x_1 + \lambda_2 x_2 + .. + \lambda_n x_n = 0$

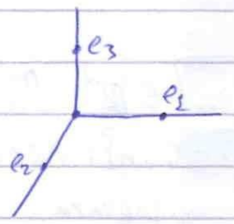
Θέτοντας $\lambda_1 = -1$, προκύπτει $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ και $\lambda_1 x_1 + .. + \lambda_n x_n = 0$ με $(\lambda_1, .., \lambda_n) \neq (0, .., 0)$

Οι υπόλοιπες ισοδυναμίες έπονται με παρόμοιο τρόπο

Πρόταση (i) Έστω H διανυσματικός υπόχωρος. Τότε: $\dim H = k \geq 1 \iff \exists \{x_1 = 0, \ldots, x_{k+1}\}$ αφφινικά ανεξάρτητο και $\{y_1, \ldots, y_N\}$, $N \geq k+2$ είναι αφφινικά εξαρτημένο $\forall\, y_1, \ldots, y_N \in H$

(ii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $\dim A = k \iff \exists \{x_1, \ldots, x_{k+1}\} \subseteq A$ αφφινικά ανεξάρτητο και κάθε $\{y_1, \ldots, y_N\} \subseteq A$ $\forall N \geq k+2$ είναι αφφινικά εξαρτημένο

Π.χ.



$\{0, e_1, e_2\}$ αφφ. ανεξάρτητο
$\{0, e_1, e_2, e_3\}$ αφφ. ανεξάρτητο

Αν $\dim(\mathrm{aff}A) = k$ και $x \in \mathrm{aff}(A)$ τότε $x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i$, $\sum \lambda_i = 1$ και τα λ_i είναι μοναδικά

(π.χ. Στο $\mathbb{R}^2$: $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \underbrace{(1-(\lambda_1+\lambda_2))}_{=\lambda_0} \cdot 0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ και $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$,

Αν $x \in \mathrm{aff}(A)$, $\dim_a A = k$, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ και τα $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ονομάζονται βαρυκεντρικές συντεταγμένες

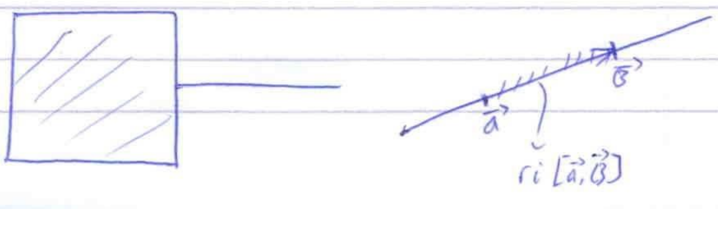
Σχετικό εσωτερικό συνόλου

Έστω $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathrm{aff}A \subseteq \mathbb{R}^d$

$\langle \mathrm{aff}A, d_{\|\cdot\|} \rangle$ μετρικός υπόχωρος του $\langle \mathbb{R}^d, \|\cdot\| \rangle$. Ορίζουμε σαν σχετικό εσωτερικό $riA = \{x \in A : \exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap \mathrm{aff}(A) \subseteq A\}$

(relative interior)

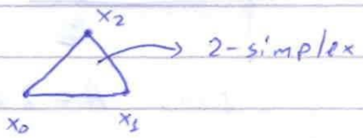
Π.χ.



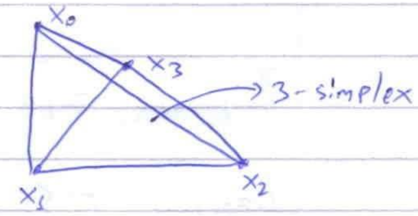
Στον $\mathbb{R}^d$ έχουμε $\{a_1, \dots, a_{d+1}\}$ αφ. ανεξ. Αν $\{x_0, \dots, x_k\}$ αφ. ανεξ., τότε $k \le d$ και παίρνουμε $S = \text{con}\{x_0, \dots, x_k\}$, $\dim S = k$. Το S ονομάζεται <u>k-simplex</u>

1-simplex : $\{x_0, x_1\}$ αφ. ανεξ.

2-simplex : $\{x_0, x_1, x_2\}$ αφ. ανεξ.



3-simplex : $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ αφ. ανεξ.



Είναι ουσιαστικά τα πιο "απλά" σύνολα διάστασης k στον $\mathbb{R}^d$.

<u>Λήμμα:</u>

Έστω $S = \text{con}\{x_0, \dots, x_k\}$ ένα k-simplex. Τότε ισχύει ότι
$$\text{ri}\, S = \left\{ x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i : \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0,\ i = 0, 1, \dots, k \right\}$$

Ιδιαιτέρως $\text{ri}\, S \neq \emptyset$, $x = \frac{1}{k+1}(x_0 + \dots + x_k) \in S$

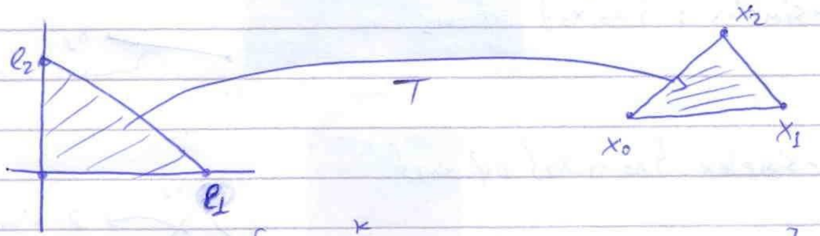
<u>Απόδειξη:</u> Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^k$
$$\mathbb{R}^k = \text{aff}\{e_0 = 0, e_1, e_2, \dots, e_k\} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i e_i : \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

$$\dim S = k, \quad \text{aff}\, S = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i x_i : \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \right\}$$

Έστω $T: \mathbb{R}^k \longrightarrow aff(S) = \mathbb{R}^k$

$$T\Big(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i e_i\Big) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i$$

T 1-1, επί και είναι συνεχής / T^{-1} = συνεχής



Έστω $A = \{x = \sum_{i=1}^{k} t_i e_i : t_1 + \dots + t_k \le 1,\ t_i \ge 0\} =$

$$= \{x = t_0 \cdot 0 + t_1 e_1 + \dots + t_k e_k : \sum_{i=0}^{k} t_k = 1 ;\ t_i \ge 0\ \forall i = 0, \dots, k\}^{*}$$

$(t_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} t_i)$

Παίρνουμε τώρα $T(A) \overset{(*)}{=} \{\sum_{i=0}^{k} t_i x_i,\ t_0 + \dots + t_k = 1,\ t_i \ge 0, i = 0, \dots, k\} = S$

Επομένως $ri\, S = ri(T(A)) = T(ri(A))$. Άρα αρκεί να βρούμε το $ri(A)$

$ri(A) = ri\{\sum_{i=1}^{k} t_i e_i : t_1 + \dots + t_k \le 1,\ t_i \ge 0\} = \{\sum_{i=1}^{k} t_i e_i : \sum_{i=1}^{k} t_i < 1,\ t_i > 0\} =$

$= \{\sum_{i=0}^{k} t_i e_i : \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\ \ (t_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} t_i > 0)$ και $t_i > 0\ \forall i = 0, \dots, k\}$

Τότε $T(ri(A)) = \{\sum_{i=0}^{k} t_i x_i : \sum_{i=0}^{k} t_i = 1,\ t_i > 0\ \forall i = 0, \dots, k\}$