Δευτέρα 25 Φεβρουαρίου 2013 — **Κυρτή Ανάλυση**

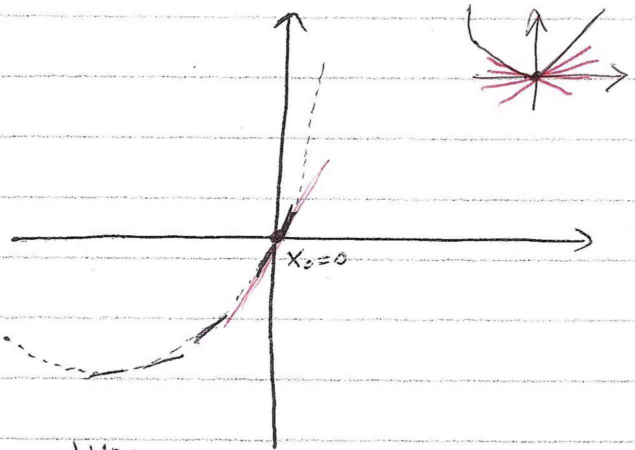
Μάθημα 3

Θεώρημα: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, I = ανοιχτό και κυρτό $\subseteq \mathbb{R}$. Τότε η f είναι κυρτή αν και μόνο αν η f έχει φέρουσα ευθεία στο x, $\forall x \in I$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε $x_0 = 0$, $f(0) = 0$, $0 \in I$

• **1η περίπτωση: $I = \mathbb{R}$**



Τότε $I = \{\lambda : \lambda > 0\} \cup \{-\mu, \mu > 0\} \cup \{0\}$

($1 \in I$ προφανώς)

Έστω $\lambda, \mu > 0$. Τότε:

$0 = f(0) = f\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(-\mu) + \frac{\mu}{\mu+\lambda}\lambda\right)$

Όμως η f έχουμε υποθέσει ότι είναι κυρτή.

Άρα $f(0) \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} f(-\mu) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} f(\lambda) \overset{\lambda+\mu>0}{\Longrightarrow} \lambda f(-\mu) + \mu f(\lambda) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{f(\lambda)}{\lambda} \geq \frac{f(-\mu)}{-\mu}, \quad \forall \lambda, \mu > 0$

Άρα $\inf\left\{\frac{f(\lambda)}{\lambda}, \lambda > 0\right\} = \beta \geq \sup\left\{\frac{f(-\mu)}{-\mu}, \mu > 0\right\} = \alpha$

Έστω $\alpha \leq u \leq \beta$

Τότε $f(t) \geq ut$, $\forall t \in \mathbb{R} = I$. Τότε έχουμε καταλήξει στην ζητούμενη ευθεία $f(t) \geq f(0) + u(t-0)$, $t \in \mathbb{R}$.

• **2η περίπτωση: $I \subsetneq \mathbb{R}$**, $0 \in I$.

Έστω $w \in I : w > 0$

Τότε $I = \{x \in \mathbb{R} : \exists \lambda > 0 \text{ με } x = \lambda w\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \exists \mu > 0 \text{ με } x = -\mu w\} \cup \{0\}$

Ουσιαστικά, παίρνουμε σαν μονάδα το w γιατί δεν ξέρουμε αν το I περιέχει το 1

Τότε, όπως πριν
$$0 = f\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(-\mu w) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(\lambda w)\right)$$ και συνεχίζουμε όπως πριν

($\Leftarrow$) Έστω $y \in I$

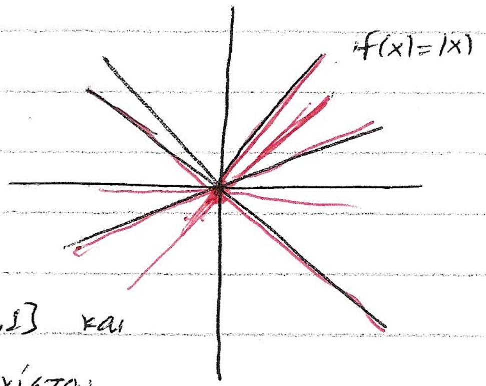
Από την υπόθεση, $\exists u_x \in \mathbb{R}: f(y) \geq f(x) + u_x(y-x)$ $(\forall x \in I)$

Ακόμα $f(y) \geq f(y) + u_y(y-y)$ (για $x=y$)

Άρα $f(y) = \max\{f(x) + u_x(y-x), x \in I\}$

Τότε προκύπτει εύκολα ότι η f είναι κυρτή (ΑΣΚΗΣΗ)

Ορισμός: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και f κυρτή. Τότε θέτουμε $\partial f(x_0) = \{u \in \mathbb{R}: f(y) \geq f(x_0) + u(y-x_0), y \in I\}$ το υποδιαφορικό της f στο x_0. Ισχύει ότι $\partial f(x_0) \neq \emptyset$, κλειστό και κυρτό

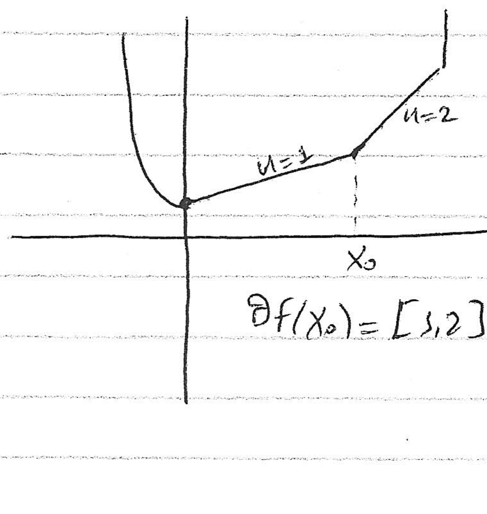


π.χ.

$f(x) = |x|$

Τότε $\partial f(0) = [-1,1]$

Στην προκειμένη περίπτωση $0 \in [-1,1]$ και άρα το 0 είναι σημείο ολικού ελαχίστου



$\partial f(x_0) = [1,2]$

Θεώρημα: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση, I = ανοιχτό και κυρτό
Τότε: (i) Υπάρχει η f'_-, f'_+ και ισχύει ότι:

αν $x<y$, $f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$

(Οι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες)

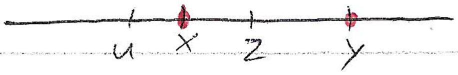
(ii) Η f'_- είναι συνεχής από τα αριστερά και η f'_+ είναι συνεχής από τα δεξιά

(iii) Αν $x_0 \in I$, τότε η f παραγωγίσιμη στο $x_0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ f'_- είναι συνεχής στο x_0

(iv) Υπάρχει $A \subseteq I$, A = αριθμήσιμο: $f|_{I \setminus A}$ να είναι παραγωγίσιμη και η $f'|_{I\setminus A}$ είναι συνεχής

Απόδειξη

(i) Έστω $x, y \in I$ = ανοιχτό, $x<y$



Έστω $w \in I$, $w<x$ και $z \in I$, $z \in (x,y)$. Τότε, από το λήμμα των 3 χορδών έχουμε ότι:

$$\underbrace{\frac{f(w)-f(x)}{w-x}}_{\text{αύξουσα ως προς } w} \leq \underbrace{\frac{f(z)-f(x)}{z-x}}_{\text{αύξουσα ως προς } z} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Τότε $\exists$ το $\lim\limits_{w \to x^-} \dfrac{f(w)-f(x)}{w-x} = f'_-(x) \leq \lim\limits_{z \to x^+} \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'_+(x) \leq$

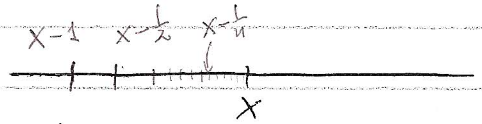
$$\leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Χρησιμοποιούμε απλά ότι αύξουσα και άνω φραγμένη συνάρτηση έχει όριο

(ii) f'_- συνεχής από τα αριστερά

Ας υποθέσουμε $I = \mathbb{R}$ (αρχικά)

Έστω $x \in I = \mathbb{R}$.



Θεωρούμε τότε την ακολουθία συναρτήσεων

$$g_n(x) = \frac{f(x-\frac{1}{n}) - f(x)}{(-\frac{1}{n})} \quad : x \in I,\ n \in \mathbb{N}.$$

Έστω n = σταθ. Τότε g_n συνεχής (f = κυρτή $\Rightarrow$ f συνεχής) στο I

Έστω x = σταθ. Τότε $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f'_-(x)$, και η ακολουθία

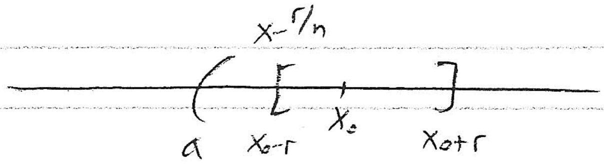
$(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία

Τότε η f'_- είναι συνεχής από τα αριστερά στο x (ΑΣΚΗΣΗ)

Έστω λοιπόν τώρα ότι $I \subsetneq \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in I$. Τότε αφού I ανοιχτό $\exists\, r>0$: $[x_0-r, x_0+r] \subseteq I$ και έστω

$$g_n(x) = \frac{f(x-\frac{r}{n}) - f(x)}{(-\frac{r}{n})}, \quad x \in I \cap (I + \tfrac{r}{n}) = \{x \in I : x - \tfrac{r}{n} \in I\} \equiv I_n$$

Τότε $I_n \neq \emptyset$ (αφού $x_0 \in I_n$),



$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, I_n = ανοιχτά + κυρτά και θεωρούμε όπως πριν

$g_n : I_n \longrightarrow \mathbb{R}$ και κάνουμε την ανάλογη διαδικασία αυτή για I όπως πριν με I_n και αποδεικνύουμε ότι $f'_-|_{I_n}$ είναι συνεχής από τα αριστερά

(iii) Αν $x_0 \in I$. Τότε η f'_- είναι συνεχής στο $x_0 \Longleftrightarrow \exists f'(x_0)$

($\Longrightarrow$) Θέλουμε δηλαδή να δείξουμε ότι η f'_- είναι συνεχής και από τα δεξιά

Έστω $x<y$, $f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y)$ Άρα $f'_-(x) = f'_+(x)$, δηλ. $\exists f'(x)$

$\downarrow y \to x^+$

$f'_-(x)$

(⇐) Έστω ότι η f'_- δεν είναι συνεχής από τα δεξιά.

Τότε $f'_-(x) < \lim\limits_{y \to x^+} f'_-(y) \leq \lim\limits_{y \to x^+} f'_+(y) \overset{f'_+}{\underset{\text{συν. δεξ.}}{=}} f'_+(x)$

Άρα $\nexists$ η παράγωγος στο x

(iv) Η f'_- είναι αύξουσα. Άρα $\exists A \subseteq I$, $A =$ αριθμήσιμο :
$f'_-\big|_{I \setminus A}$ συνεχής

Άρα υπάρχει η $f'(x)$, $\forall x \in I \setminus A$ (από το (iii)) (και ακριβώς στο $I \setminus A$)

$$f'\big|_{I \setminus A} = f'_-\big|_{I \setminus A} \quad \text{και} \quad f'_-\big|_{I \setminus A} \text{ συνεχής}$$

Άρα σε κυρτές συναρτήσεις, η παράγωγος υπάρχει εκτός από αριθμήσιμο πλήθος σημείων A και είναι συνεχής στο $I \setminus A$.

Πόρισμα 1: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, $I =$ ανοιχτό + κυρτό $\subseteq \mathbb{R}$, f κυρτή και παραγωγίσιμη. Τότε η f είναι C^1 ($f' =$ συν.)

Πόρισμα 2: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, $I =$ ανοιχτό και κυρτό $\subseteq \mathbb{R}$.

(i) Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε η f είναι κυρτή $\Leftrightarrow$ f' αύξουσα

(ii) Έστω ότι η f είναι 2-φορές παραγωγίσιμη. Τότε η f είναι κυρτή $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0$

Απόδειξη

(i)

(⇒): ΑΜΕΣΟ ($f' = f'_-$ = αύξουσα)

(⇐): Με άτοπο και Θ.Μ.Τ.

Διαφόριση και φέρουσα ευθεία - Ολ. Ελάχιστο

Πρόταση:

(i) Έστω f κυρτή, $x_0 \in I$, τότε $\partial f(x_0) = [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$

Το x_0 είναι σημείο ολ. ελαχίστου $\Leftrightarrow 0 \in \partial f(x_0)$

(ii) Αν f κυρτή, τότε $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \partial f(x_0) =$ μονοσύνολο. Οπότε,

το x_0 είναι σημείο ολ. ελαχίστου $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

Ασκήσεις

① Έστω $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ και $x_1, \dots, x_n > 0$. Τότε

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Ιδιαίτερα αν $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, τότε $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

② Ανισότητα του Young:

Έστω $x, y \geq 0$, $p, q < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε

$$\boxed{xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}}$$

③ i) Αν $x_i, y_i \geq 0$, $i = 1, \dots, d$, $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε:

$$x_1 y_1 + \dots + x_d y_d \leq (x_1^p + \dots + x_d^p)^{1/p} (y_1^q + \dots + y_d^q)^{1/q}$$

Για $p = q = 2 \to$ C-S

ii)

$$[(x_1+y_1)^p + \dots + (x_d+y_d)^p]^{1/p} \leq (x_1^p + \dots + x_d^p)^{1/p} + (y_1^p + \dots + y_d^p)^{1/p}$$

Ανισότητες Hölder (i)

Minkowski (ii)

(4) Συνάρτηση Γάμμα

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad , x>0$$ Να δείξουμε ότι:

(i) $\Gamma(1)=1$

(ii) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $x>0$

(iii) $\log\Gamma$ είναι κυρτή συνάρτηση

Αντίστροφα: αν $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) τότε $g\equiv\Gamma$ (χαρακτηρισμός της Γ συνάρτησης $\to$ Artin)

(5) Έστω $f:(a,\beta)\to\mathbb{R}$ κυρτή και παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 0$, $x\in(a,\beta)$. Υποθέτουμε ότι $\exists\,\xi\in(a,\beta): f(\xi)=0$. Τότε η ακολουθία με $x_1\in(\xi,\beta)$, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_{n+1})}$ είναι συγκλίνουσα

και $\lim_n x_n=\xi$ (Μέθοδος Newton)

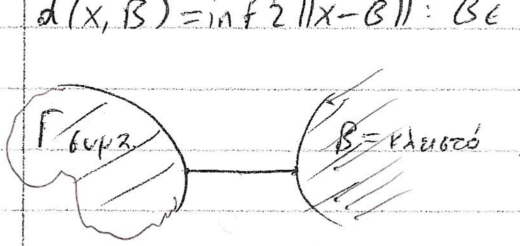
(Υπόδειξη: $(x_n)_n\downarrow$ κάτω φραγμένη από το ξ. Άρα $\exists\,\ell: x_n\to\ell$.
Τότε $f(x_n)\to f(\ell)$
(f-C^1 πορ.1) $f'(x_n)\to f'(\ell)$ / $\ell=\ell-\dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$, $f(\ell)=0$, $\ell=\xi$)

Κυρτές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Λήμμα / Άσκηση: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^d$, A = ανοιχτό, $\Gamma\subseteq A$ και Γ = συμπαγές. Τότε $\exists\,\rho>0$: $\Delta=\{x\in\mathbb{R}^d: d(x,\Gamma)\le\rho\}\subseteq A$ και Δ συμπαγές

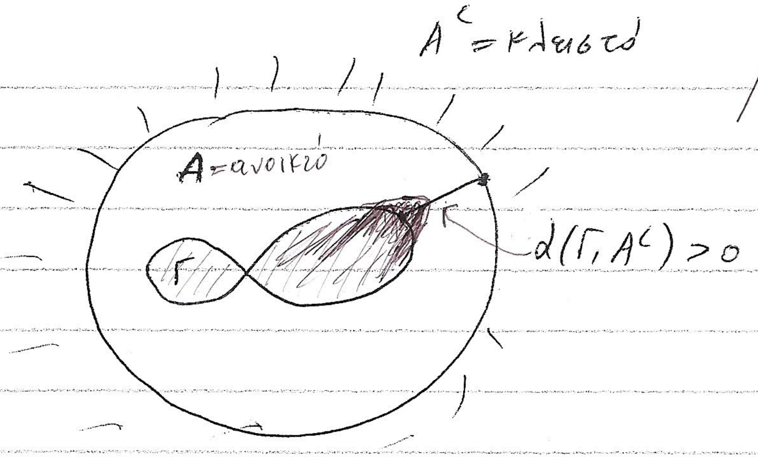
Υπόδειξη

$d(x,B)=\inf\{\|x-b\|: b\in B\}$, συνεχής



, $\Gamma\cap B=\emptyset$, $d(\Gamma,B)=\inf\{\|\gamma-b\|: \gamma\in\Gamma, b\in B\}>0$

$\rho=\dfrac{d(\Gamma,B)}{2}>0$



/ Για $A^c \neq \emptyset$.

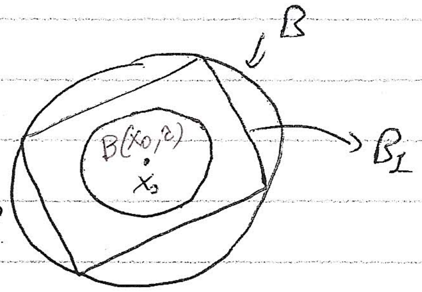
<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f: C \to \mathbb{R}$, C = ανοιχτό και κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$, f = κυρτή.
Τότε, (i) η f συνεχής
(ii) η f είναι Lipschitz στα συμπαγή υποσύνολα του C.

<u>Απόδειξη:</u>

(i) Έστω $x_0 \in C$ = ανοιχτό $\Rightarrow \exists B(x_0, r') \subseteq C$

$B_1(x_0, r') \subseteq B(x_0, r')$

Έστω $\underset{r(x_0)}{\underset{|||}{r>0}}$, $B(x_0, r) \subseteq B_1(x_0, r')$



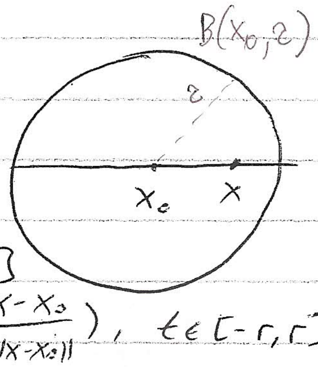
$x \in B(x_0, r)$, $B(x_0,r) \subseteq B_1(x_0,r) = \text{co}\{y_i, i=1,2,\dots,2d\}$

Άρα το x γράφεται ως εξής: $x = \sum_{i=1}^{2d} \lambda_i y_i$, $\sum_{i=1}^{2d} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$

Τότε $f(x) \underset{(\text{Jensen})}{\leq} \sum_{i=1}^{2d} \lambda_i f(y_i) \leq \max\{f(y_i) : i=1,\dots,2d\} = L = L(x_0)$

Άρα η f είναι άνω φραγμένη στο $B(x_0, r)$ (*)

Έστω τώρα $x \in B(x_0, r)$, $x \neq x_0$
$0 < \|x - x_0\| < r$

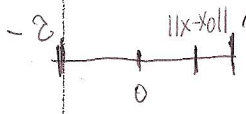


Τότε $x_0 + t\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \in B(x_0, r), t \in [-r, r]$

Έστω τώρα $g(t) = f\left(x_0 + t\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}\right)$, $t \in [-r, r]$ κυρτή

Τότε από το Λ.3 χορδών $\frac{g(\|x-x_0\|) - g(0)}{\|x - x_0\|} \leq \frac{g(r) - g(0)}{r}$

$\frac{g(r) - g(0)}{-r} \leq$



(*) και $g(t) \leq L$, $t \in [-r, +r]$

Τότε $\dfrac{f(x_0)-g(-r)}{r} \leq \dfrac{f(x)-f(x_0)}{\|x-x_0\|} \leq \dfrac{g(r)-f(x_0)}{r}$

~~Όμως $x_0+t\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} \in B(x_0,r)$, $|t|\leq r$~~ Από (+)

~~Άρα όρια~~ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\|x-x_0\|} \leq \dfrac{L-f(x_0)}{r}$ και

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\|x-x_0\|} \geq \frac{f(x_0)-L}{r}$$

Άρα $|f(x)-f(x_0)| \leq \left(\dfrac{L-f(x_0)}{r}\right)\|x-x_0\|$, $x\in B(x_0,r)$

Άρα, η f είναι συνεχής (και τοπικά Lipschitz) στο τυχαίο $x_0\in C$.

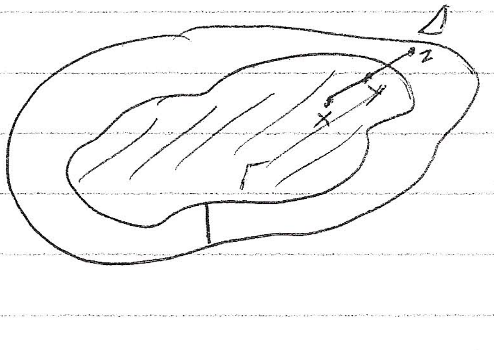
(ii) Έστω $\Gamma \subseteq C$, Γ συμπαγές, C = ανοιχτό. Τότε από το προηγούμενο λήμμα, $\exists\, \rho>0 : \Delta=\{y\in\mathbb{R}^d : d(y,\Gamma)\leq\rho\}\subseteq C$ και Δ = συμπαγές
$\overset{\shortparallel}{\rho(\Gamma)}$

Έστω $x,y\in\Gamma$, $x\neq y$

f συνεχής στο C (από το (i))

Δ = συμπαγές $\subseteq C$

Άρα $\exists\, M=M(\Gamma) : |f(z)|\leq M \;\forall z\in\Delta$



Έστω $z=y+\dfrac{\rho}{\|x-y\|}(y-x)$

Τότε $\|z-y\|=\rho \overset{(y\in\Gamma)}{\Longrightarrow} z\in\Delta$, $|f(z)|\leq M$. Ακόμα, έχουμε ότι $y=(1-\lambda)x+\lambda z$, $\lambda=\dfrac{\|x-y\|}{\rho+\|x-y\|}$

Τότε $f(y)\leq(1-\lambda)f(x)+\lambda f(z) \Rightarrow f(y)-f(x)\leq\lambda[f(z)-f(x)]\leq$
$\leq\lambda 2M = \dfrac{\|x-y\|}{\rho+\|x-y\|}2M \leq \dfrac{2M}{\rho}\|x-y\|$ και τα M,ρ εξαρτώνται μόνο από το σύνολο Γ

Άρα $|f(x)-f(y)|\leq\dfrac{2M}{\rho}\|x-y\|$. Άρα f Lipschitz