Μαυράκη Νίκη-Μυρτώ Α.Μ. ΜΜ22008001[illegible]

Σκοπός Έστω $\langle H(B), h\rangle$ το σύνολο των συμπαγών υποσυνόλων του συμπαγούς συνόλου $B \subseteq \mathbb{R}^d$. Θα δείξουμε ότι ο $\langle H(B), h\rangle$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Υπενθύμιση Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $F \subseteq X$. Το F είναι κλειστό στον $X \Leftrightarrow$ ο $(F, \rho|_F)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Απόδειξη ("$\Rightarrow$") Έστω $F \subseteq X$ κλειστό. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία του F. Τότε, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία και στον X και, αφού ο X είναι πλήρης, έπεται ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Τώρα, από την υπόθεση ότι το F είναι κλειστό και αφού $x_n \in F$ $\forall n\in\mathbb{N}$ έπεται ότι $x \in F$. Άρα, ο F είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος.

("$\Leftarrow$") Έστω ότι ο F είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος. Θα δ.ο. είναι κλειστός. Έστω $(y_n) \subseteq F$ με $y_n \to y \in X$. Αφού η y_n είναι συγκλίνουσα, είναι βασική ακολουθία και περιέχεται στον πλήρη χώρο F. Άρα, συγκλίνει σε σημείο του F. Από την μοναδικότητα ορίου, αφού $y_n \to y$, έχουμε ότι $y \in F$. Έπεται ότι το F είναι κλειστό υποσύνολο του X.

1. Θεώρημα Ο χώρος $\langle H(\mathbb{R}^d), h\rangle$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Ιδιαιτέρως: Αν ο X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$, τότε ο $\langle H(X), h\rangle$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Απόδειξη Έστω $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία του $\langle H(\mathbb{R}^d), h\rangle$. Θα δείξω ότι η K_n συγκλίνει σε κάποιο $K \in H(\mathbb{R}^d)$.

Αφού η $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία, είναι φραγμένη, άρα $\exists$ $A \in H(\mathbb{R}^d)$ και $\mu \geq 0$ τ.ω. $K_n \subseteq S_h(A, \mu)$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ $h(K_n, A) \leq \mu$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow K_n \subseteq A + \mu = B$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Το B είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, άρα $B \in H(\mathbb{R}^d)$.

(αφού $B = A + \mu := A + \mu \hat{S}(0,1)$, αν $b_n \in B$ με $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$ έχω $b_n = a_n + \mu s_n$ όπου $a_n \in A$, $s_n \in \hat{S}(0,1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και A συμπαγές, άρα υπάρχει υπακολουθία $a_{k_n} \to a \in A$. Τότε: $b_{k_n} = a_{k_n} + \mu s_{k_n} \to b \Rightarrow$ $\mu s_{k_n} \to b - a$ και αφού $\mu s_{k_n} \in \mu \hat{S}(0,1)$: κλειστό, έχω ότι $b - a \in \mu \hat{S}(0,1)$, άρα $b = (b-a) + a \in \mu \hat{S}(0,1) + A$ και B κλειστό).

Θεωρώ $A_m = \bigcup_{i=m}^{\infty} K_i$. Η A_m είναι φθίνουσα (προφανώς) ακολουθία κλειστών (προφανώς) και φραγμένων ($A_m \subseteq B$ $\forall m\in\mathbb{N}$)

υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Συνεπώς, η A_m συγκλίνει (πρόταση) και μάλιστα $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m = K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$.

<u>Ισχυρισμός</u> $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K$

Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρω $n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $K_n \subseteq K+\varepsilon$ (i) και $K \subseteq K_n+\varepsilon$ (ii) $\forall n\geq n_0$

• Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = K$ $\exists\, n_1\in\mathbb{N}$ τ.ω. $A_n \subseteq K+\varepsilon$ $\forall n\geq n_1$
$\Rightarrow$ $K_n \subseteq A_n \subseteq K+\varepsilon$ $\forall n \geq n_1$.

• Τώρα, η $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, άρα για το $\varepsilon>0$ $\exists\, n_2\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall i,n\geq n_2$ $K_i \subseteq K_n+\varepsilon \Rightarrow \forall n\geq n_2$ $\bigcup\limits_{i=n_2}^{\infty} K_i \subseteq K_n+\varepsilon$
$\Rightarrow$ $A_{n_2} \subseteq \overline{K_n+\varepsilon} = K_n+\varepsilon$ $\forall n\geq n_2$
$\Rightarrow$ $K = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq A_{n_2} \subseteq K_n+\varepsilon$ $\forall n\geq n_2$.

Άρα, αν $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ το ζητούμενο έπεται.

<u>Ιδιαιτέρως:</u> Αν ο X πλήρης μετρικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$, θ.δ.ο. ο $\langle \mathcal{H}(X), h\rangle$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h\rangle$, άρα πλήρης (βλ. υπενθύμιση)

Έστω $K_n \subseteq X$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ακολουθία του $\mathcal{H}(X)$ με $K_n \xrightarrow[n\to\infty]{} K\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$
θ.δ.ο. $K\in\mathcal{H}(X)$.

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\, n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τ.ω. $K\subseteq K_n+\varepsilon \subseteq X+\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$
$\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $K\subseteq \{x\in\mathbb{R}^d : d(x,X)\leq\varepsilon\}$
$\Rightarrow$ $K \subseteq \bigcap\limits_{\varepsilon>0}\{x\in\mathbb{R}^d : d(x,X)\leq\varepsilon\} = \{x\in\mathbb{R}^d : d(x,X)=0\}$
$= \overline{X} = X$

X πλήρες $\subseteq\mathbb{R}^d$ άρα X κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

<u>Θεώρημα επιλογής του Blaschke</u>

Έστω $\langle \mathcal{H}(B), h\rangle$ το σύνολο των συμπαγών υποσυνόλων του συμπαγούς $B\subseteq\mathbb{R}^d$. Τότε, ο $\langle \mathcal{H}(B), h\rangle$ είναι συμπαγής μ.χ.

<u>Απόδειξη</u> Το σύνολο B είναι συμπαγές, άρα είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^d$, συνεπώς από το προηγούμενο θεώρημα, έπεται ότι ο $\langle \mathcal{H}(B), h\rangle$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Μένει να δείξω ότι είναι ολικά φραγμένος...

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή το B είναι συμπαγές υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$ τ.ω. $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon/4)$. Έστω $C_i = \hat{S}(x_i, \varepsilon/4)$, $i = 1, \dots, n$.
Θεωρώ σαν $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων ενώσεων στοιχείων του $\{C_i : i = 1, 2, \dots, n\}$. Το $\mathcal{F}$ είναι πεπερασμένο σύνολο.

<u>Ισχυρισμός:</u> $\mathcal{H}(B) \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} S_h(F, \varepsilon)$. $\mathcal{F}$: πεπερασμένο.

<u>Απόδειξη ισχυρισμού</u> Έστω $A \in \mathcal{H}(B)$. Θεωρώ όλα τα $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}$ για $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ώστε $A \cap C_{i_\nu} \neq \emptyset$ $\forall \nu = 1, \dots, k$.
Τότε: $A \subseteq C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup \dots \cup C_{i_k} = F \in \mathcal{F}$. θ.δ.ο. $A \in S_h(F, \varepsilon)$.
Μένει ν.δ.ο. $F \subseteq A + \varepsilon$
Έστω $x \in F$. Τότε $x \in C_{i_\nu}$ για κάποιο $\nu = 1, \dots, k$ και $A \cap C_{i_\nu} \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $a \in A \cap C_{i_\nu}$. Τώρα για το $x_{i_\nu} \in C_{i_\nu} = \hat{S}(x_{i_\nu}, \varepsilon/4)$ έχω
$|a - x| \leq |a - x_{i_\nu}| + |x_{i_\nu} - x| \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$
άρα $x \in A + \varepsilon$. Επομένως
$$\left.\begin{array}{l} F \subseteq A + \varepsilon/2 \\ A \subseteq F \end{array}\right\} \Rightarrow h(A, F) < \varepsilon$$
και $A \in S_h(F, \varepsilon)$. Τελικά $\mathcal{H}(B) \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} S_h(F, \varepsilon)$
και ο $\langle \mathcal{H}(B), h \rangle$ είναι πλήρης και ολικά φραγμένος υπόχωρος του $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h \rangle$, άρα συμπαγής.

<u>3 Θεώρημα</u> Ο χώρος $\langle Hc(\mathbb{R}^d), h \rangle$ των <u>κυρτών συμπαγών</u> υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, είναι πλήρης μετρικός χώρος.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ βασική ακολουθία του $\langle Hc(\mathbb{R}^d), h \rangle$. Θα δείξω ότι συγκλίνει σε κάποιο $\mathcal{F} \in Hc(\mathbb{R}^d)$.
$\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ βασική ακολουθία του $Hc(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ και ο $\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Άρα, γνωρίζω ότι η $\mathcal{F}_n$ συγκλίνει σε κάποιο $\mathcal{F} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$. Μένει να δειχθεί ότι το $\mathcal{F}$ είναι κυρτό.
Έστω $x, y \in \mathcal{F}$ και $\lambda \in [0, 1]$. θ.δ.ο. $(1-\lambda)x + \lambda y \in \mathcal{F}$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F} + \varepsilon/2$ και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_n + \varepsilon/2$ $\forall n \geq n_0$.
Ιδιαιτέρως: $\mathcal{F}_{n_0} \subseteq \mathcal{F} + \varepsilon/2$ (1) και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_{n_0} + \varepsilon/2$ (2).
Για το $x \in \mathcal{F}$ έχω — από την (2) ότι $x \in \mathcal{F}_{n_0} + \varepsilon/2$
άρα $\exists\, x_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$ —— τ.ω. $\|x - x_0\| \leq \varepsilon/2$ (I)

Όμοια για το $y \in \mathcal{F}$ υπάρχει $y_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$ τ.ω. $\|y - y_0\| \leq \varepsilon/2$ (II).
$x_0, y_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$ και $\mathcal{F}_{n_0}$ κυρτό, άρα $(1-\lambda)x_0 + \lambda y_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$.
Συνεπώς, από την (I) υπάρχει $w \in \mathcal{F}$ τ.ω. $\|(1-\lambda)x_0 + \lambda y_0 - w\| \leq \varepsilon/2$ (III)
Τώρα,

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y - w\| \leq \|(1-\lambda)x + \lambda y - ((1-\lambda)x_0 + \lambda y_0)\| +$$
$$\|(1-\lambda)x_0 + \lambda y_0 - w\| \leq (1-\lambda)\|x - x_0\| + \lambda\|y - y_0\| + \|(1-\lambda)x_0 + \lambda y_0 - w\|$$
$$\underset{(I),(II),(III)}{\leq} \varepsilon/2(1-\lambda) + \lambda\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $(1-\lambda)x + \lambda y \in \overline{\mathcal{F}} \Rightarrow$
$(1-\lambda)x + \lambda y \in \mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$ αφού $\mathcal{F}$ κλειστό.
άρα $\mathcal{F}$ κυρτό, $\mathcal{F} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$. Συνεπώς $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d)$.

<u>Συμπέρασμα</u>: το $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$.

<u>Παρατήρηση</u>: Στον $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d)$ θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{P}$ των πολυτόπων. Τότε $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d)$, ~~δηλ.~~:
αν $K \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ P πολύτοπο τ.ω.

$$P \subseteq K \subseteq P + \varepsilon$$

δηλ. $h(P, K) < \varepsilon$ άρα $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d) \subseteq \overline{\mathcal{P}}$
και $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \overline{\mathcal{P}} \subseteq \overline{\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d)$
(είναι πλήρης, άρα κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$).

Επίσης, το $\mathcal{P}$ είναι 1ης κατηγορία στο $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^d)$, δηλ.
$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\overline{A_i}^{\circ} = \emptyset$ (Εργασία Ζαμπίρεσκου)

Παρατήρηση Από την απόδειξη στο Θεώρημα 1, έχουμε ότι, αν K_n μια συγκλίνουσα ακολουθία του $\langle \mathcal{H}(\mathbb{R}^d), h \rangle$, τότε:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{i=m}^{\infty} K_i} \right) = K$$

Ερώτημα? Μπορώ να έχω σαφέστερη εικόνα για τα σημεία του K;

4 Θεώρημα Εάν η ακολουθία $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ συγκλίνει στο K, τότε $K = \{x\in\mathbb{R}^d \mid \exists (x_n) \subseteq \mathbb{R}^d$ με $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ και $x_n \in K_n \ \forall n\in\mathbb{N}\}$ $:= \Lambda$

Απόδειξη Έστω $x\in K$. Επιλέγω $x_n \in \{y\in K_n : d(x, K_n) = \|x-y\|\}$.
τότε: $\|x - x_n\| = d(x, K_n) \leq h(K, K_n)$
και επειδή $\lim_{n\to\infty} h(K, K_n) = 0$ έχω $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
άρα $K\subseteq\Lambda$.
Έστω τώρα $x\in\Lambda$, δηλαδή $x\in\mathbb{R}^d$ για το οποίο υπάρχει $(x_n)\subseteq\mathbb{R}^d$ με $x_n\in K_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ώστε $x_n \to x$.
Θ.δ.ο. $x\in K = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\overline{\bigcup_{i=m}^{\infty} K_i}\right)$.

Έστω $m\in\mathbb{N}$. Τότε $x_n \in \bigcup_{i=m}^{\infty} K_i$ για $n\geq m$ και $(x_n)_{n\geq m} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ άρα $x\in \overline{\bigcup_{i=m}^{\infty} K_i}$

Το $m\in\mathbb{N}$ ήταν τυχόν, άρα $x\in K$.

Παρατήρηση: Αν $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία του $\mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ και $K = \{x\in\mathbb{R}^d : \exists (x_n)\subseteq\mathbb{R}^d$ ώστε $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ και $x_n\in K_n \ \forall n\in\mathbb{N}\}$ $\in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$, (*) **δεν έπεται** ότι η K_n είναι συγκλίνουσα
π.χ. αν $K_n = [0,1]\cup\{n\}$, $n\in\mathbb{N}$ τότε:
$K = [0,1] \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, ενώ η K_n δεν συγκλίνει.
Στην περίπτωση που τα K_n είναι επιπλέον κυρτά σύνολα και ισχύει η (*) έπεται ότι η K_n συγκλίνει...