• **ΘΕΩΡΗΜΑ Bárány (1982)**: Έστω $S_1, S_2, \dots, S_{n+1} \subseteq \mathbb{R}^n$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $i = 1, 2, \dots, n+1$ $0 \in conv(S_i)$.
Τότε υπάρχουν $u_1 \in S_1, \dots, u_{n+1} \in S_{n+1}$ ώστε $0 \in conv(\{u_1, \dots, u_{n+1}\})$.

Απόδειξη: Αρχικά μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι κάθε S_i είναι πεπερασμένο σύνολο, $i = 1, \dots, n+1$. Πράγματι, από το Θ. Καραθεοδωρή βλέπουμε ότι για να περιγραφεί ένα $z \in conv(S_i)$, $S_i \subseteq \mathbb{R}^n$ απαιτούνται το πολύ $n+1$ σημεία του S_i ώστε να περιγραφεί το z ως κυρτός συνδυασμός αυτών, ορίζουμε λοιπόν σαν S_i' το σύνολο αυτών των σημείων. Τότε S_i' πεπερασμένο $i = 1, \dots, n+1$. Στη δική μας περίπτωση θεωρούμε $z = 0$. Προφανώς $S_i' \subseteq S_i$. Έτσι αν δείξουμε ότι υπάρχουν $u_1 \in S_1', \dots, u_{n+1} \in S_{n+1}'$ ώστε $0 \in conv(\{u_1, \dots, u_{n+1}\})$ έχουμε τελειώσει.
Υποθέτουμε λοιπόν ότι όλα τα S_i είναι πεπερασμένα και ότι δεν ισχύει το ζητούμενο, δηλαδή για οποιαδήποτε επιλογή $a_i \in S_i$, $i = 1, \dots, n+1$, $0 \notin conv(\{a_1, \dots, a_{n+1}\})$, επομένως θα ισχύει ότι $d(0, conv(\{a_1, \dots, a_{n+1}\})) > 0$. Τα S_i είναι πεπερασμένα άρα $\forall a_i \in S_i$ έχουμε $\# S_i$ πεπερασμένες επιλογές άρα υπάρχουν $(\# S_1) \cdot (\# S_2) \cdot \dots \cdot (\# S_{n+1})$ τέτοιες $(n+1)$-άδες δηλαδή πεπερασμένες άρα $\exists$ μία από αυτές, έστω $\{z_1, \dots, z_{n+1}\}$ ώστε το $d(0, T)$, όπου $T = conv(\{z_1, \dots, z_{n+1}\})$, να είναι το ελάχιστο δυνατό.
Έστω $d := d(0, T)$. Το T είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο στον $\mathbb{R}^n$) άρα $\exists y \in T$ ώστε $d(0, T) = \|y\|_2$

ΛΗΜΜΑ: Αν θ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του y, τότε $T \subset \overline{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \geq \|y\|_2\}$.

Απόδειξη Λήμματος: Το $\overline{H}_+$ είναι κυρτό σύνολο (Πράγματι, αν πάρουμε $x, y \in \overline{H}_+$ και $\lambda \in (0,1)$ τότε ισχύει:
$\langle (1-\lambda)x + \lambda y, \theta \rangle = \langle (1-\lambda)x, \theta \rangle + \langle \lambda y, \theta \rangle = (1-\lambda)\langle x, \theta \rangle + \lambda \langle y, \theta \rangle \geq$
$\geq (1-\lambda)\|y\|_2 + \lambda \cdot \|y\|_2 = \|y\|_2$ δηλαδή $(1-\lambda)x + \lambda y \in \overline{H}_+$)
Επομένως αρκεί ν.δ.ο $\{z_1, \dots, z_{n+1}\} \subseteq \overline{H}_+$ αφού τότε το T είναι

(*) αφού $y+t(z-y) = (1-t)y + tz$ και $y \in \mathrm{conv}\{z_1,\dots,z_{n+1}\}$, $z \in \{z_1,\dots,z_{n+1}\} \subseteq \mathrm{conv}\{z_1,\dots,z_{n+1}\}$ και άρα $y+t(z-y) \in \mathrm{conv}\{z_1,\dots,z_{n+1}\}$ έστω $w = y + t(z-y) \in \mathrm{conv}\{z_1,\dots,z_{n+1}\} = T$, αλλά $y \in T$ έχει την ιδιότητα του ελάχιστου μέτρου, άρα $\|w\|_2 \geq \|y\|_2 \Leftrightarrow \|w\|_2^2 \geq \|y\|_2^2$

-2-

το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το $\{z_1,\dots,z_{n+1}\}$ και άρα θα έχουμε $T \subseteq \overline{H}_+$.

Έστω λοιπόν $z \in \{z_1,\dots,z_{n+1}\}$ τότε $\forall\, t \in (0,1)$ ισχύει η ανισότητα:

(*) $\|y+t(z-y)\|_2^2 \geq \|y\|_2^2 \Leftrightarrow \|y\|^2 + 2t\langle y, z-y\rangle + t^2\|z-y\|_2^2 \geq \|y\|_2^2$

Επομένως $2\langle y, y-z\rangle \leq t\cdot\|z-y\|_2^2 \Leftrightarrow \frac{t}{2}\|z-y\|_2^2 \geq \langle y, y-z\rangle$

Παίρνοντας τώρα $t \to 0^+$ έχουμε ότι $\langle y, y-z\rangle \leq 0 \Leftrightarrow$

$\|y\|_2^2 - \langle y, z\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle y, z\rangle \geq \|y\|_2^2$ ①, αλλά $\theta = \frac{y}{\|y\|_2} \Leftrightarrow$

$y = \theta\cdot\|y\|_2$ άρα η ① $\Leftrightarrow \langle \theta\|y\|_2, z\rangle \geq \|y\|_2^2 \Leftrightarrow$

$\|y\|_2\cdot\langle\theta, z\rangle \geq \|y\|_2^2 \Leftrightarrow \langle\theta, z\rangle \geq \|y\|_2$ άρα $z \in \overline{H}_+$. ■

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος:

Θέτουμε $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle = \|y\|_2\}$ και $J_H = \{z_1,\dots,z_{n+1}\} \cap H$.

Τότε $\underline{T \cap H = \mathrm{conv}(J_H) \subseteq H}$.

Πράγματι: Έχουμε $T = \mathrm{conv}\{z_1,\dots,z_{n+1}\}$ και θέλουμε ν.δ.ο:

$(\mathrm{conv}(\{z_1,\dots,z_{n+1}\})) \cap H = \mathrm{conv}(\{z_1,\dots,z_{n+1}\} \cap H)$

"$\subseteq$": Έστω $x \in T\cap H \Leftrightarrow x \in T$ και $x \in H$.

$\underline{x \in T}$: Είμαστε στον $\mathbb{R}^n$ και άρα $\exists$ουν $z_1', z_2', \dots, z_m' \in \{z_1,\dots,z_{n+1}\}$

$(m \leq n+1)$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in [0,1]$ με $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ τ.ώ: $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i z_i'$

Από λήμμα γνωρίζουμε ότι $\langle z_i', \theta\rangle \geq \|y\|_2$ $i = 1,\dots,m$

Έστω ότι $\exists\, i \in \{1,\dots,m\}$ τ.ώ: $\langle z_i', \theta\rangle > \|y\|_2$, τότε

$\langle x, \theta\rangle = \langle \lambda_1 z_1' + \lambda_2 z_2' + \dots + \lambda_m z_m', \theta\rangle =$

$= \lambda_1\langle z_1', \theta\rangle + \lambda_2\langle z_2', \theta\rangle + \dots + \lambda_m\langle z_m', \theta\rangle$

$\lambda_1\cdot\|y\|_2 + \lambda_2\|y\|_2 + \dots + \lambda_m\|y\|_2 = \|y_2\|$ που όμως είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι $x \in H$ δηλ. $\langle x, \theta\rangle = \|y\|_2$

Άρα $\langle z_i', \theta\rangle = \|y\|_2$ $\forall\, i \in \{1,\dots,m\}$ δηλαδή ισχύει ότι

$x \in \mathrm{conv}(\{z_1,\dots,z_{n+1}\} \cap H)$.

"$\supseteq$": Έστω $\{z_1,\dots,z_{n+1}\} \cap H$ και

$x \in \mathrm{conv}(\{z_1,\dots,z_{n+1}\} \cap H)$, τότε $\exists$ουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0,1]$

με $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ και $x_1, x_2, \dots, x_k \in \{z_1,\dots,z_{n+1}\} \cap H$, ώστε

$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$. Τότε όμως $x_1, x_2, \dots, x_k \in \{z_1,\dots,z_{n+1}\}$

οπότε $x \in T$ και $\langle x, \theta\rangle = \langle \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \theta\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle x_i, \theta\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \|y\|$

άρα $x \in H$ δηλαδή $x \in T\cap H$.

(*) γιατί η απόσταση $d(0,T_1) = \|y_1\|_2$ (το μικρότερο μέτρο
$y \in conv(\{z_i : i \neq j\}) \Rightarrow y \in T_1$ και $\omega_j \in T_1$ άρα το
$u_1 = y + t(\omega_j - y) \in T_1$ τότε $d(0,T_1) = \|y_1\|_2 \leq \|u_1\|_2$

Είναι γνωστό ότι $\dim H = n-1$, επομένως εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Καραθεοδωρή για το $y \in T \cap H$ (Πράγματι $y \in H$ αφού έχουμε $\langle y, \theta \rangle = \langle y, \frac{y}{\|y\|_2} \rangle = \frac{1}{\|y\|_2} \cdot \langle y, y \rangle = \frac{\|y\|_2^2}{\|y\|_2} = \|y\|_2$) έχουμε ότι γράφεται ως κυρτός συνδυασμός το πολύ n σημείων από τα z_i ($n+1$ πλήθος), επομένως υπάρχει $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ ώστε $y \in conv(\{z_i : i \neq j\})$

Από υπόθεση έχουμε ότι $\theta \in conv(S_j)$ και επιπλέον $\theta \in H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle < \|y\|_2\}$, άρα υπάρχει $\omega_j \in S_j$ με $\omega_j \in H_-$ (Πράγματι αν είχαμε $S_j \subset \overline{H}_+$ τότε θα είχαμε λόγω της κυρτότητας του $\overline{H}_+$ ότι $conv(S_j) \subseteq \overline{H}_+ \Rightarrow 0 \in \overline{H}_+$, άτοπο αφού $\langle 0, \theta \rangle = 0 \neq \|y\|_2 > 0$

Θεωρούμε το σύνολο $T_1 = conv\{\omega_j, z_i : i \neq j\}$, τότε $\forall t \in (0,1)$ ισχύει ότι $d(0,T_1) \leq \|y + t(\omega_j - y)\|_2$ (*) $\Leftrightarrow$

$d^2(0,T_1) \leq \|y\|_2^2 + 2t\langle y, \omega_j - y \rangle + t^2 \|\omega_j - y\|_2^2 \Leftrightarrow$

$d^2(0,T_1) \leq d^2(0,T) + 2t\langle y, \omega_j - y \rangle + t^2 \|\omega_j - y\|_2^2$

Θέτουμε $a = \|\omega_j - y\|_2^2 > 0$ αφού $y \in conv(\{z_1, \dots, z_{n+1}\})$ και

$b = \langle y, \omega_j - y \rangle = \langle y, \omega_j \rangle - \|y\|_2^2 = \langle \frac{y}{\|y\|_2} \cdot \|y\|_2, \omega_j \rangle - \|y\|_2^2 =$
$= \|y\|_2 \cdot \langle \theta, \omega_j \rangle - \|y\|_2^2 = \|y\|_2 (\langle \theta, \omega_j \rangle - \|y\|_2) < 0$

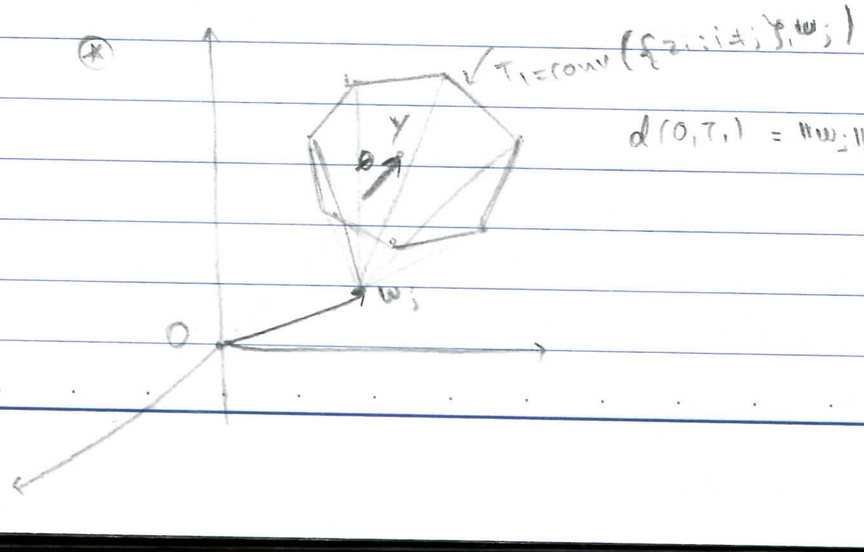
αφού $\omega_j \in H_-$.

Τότε $2tb + t^2 a = ta(t + \frac{2b}{a}) < 0 \Leftrightarrow t + \frac{2b}{a} < 0 \Leftrightarrow$
$t < -\frac{2b}{a}$ άρα αν πάρουμε $0 < t < \min\{1, -\frac{2b}{a}\}$ έχουμε ότι $d^2(0,T_1) \leq d^2(0,T) + (2tb + t^2 a) < d^2(0,T) \Leftrightarrow$

$d^2(0,T_1) < d^2(0,T) \Leftrightarrow$

$d(0,T_1) < d(0,T)$ που έρχεται σε αντίφαση με την επιλογή του T.

(*)



$d(0,T_1) = \|\omega_j\|_2 \leq \|y + t(\omega_j - y)\|_2$

Γενίκευση Helly: Έστω $\{A_i : i \in I\}$ $(|I| \geq n+1)$ (ίσως άπειρη) οικογένεια κυρτών + συμπαγών $\subseteq \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $\forall$ $n+1$ από τα A_i έχουν $\neq \emptyset$ τομή $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Απόδειξη: Αν J πεπερασμένο $\subseteq I$ με $|J| \geq n+1$ τότε η $\{A_j, j \in J\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Helly, άρα έχει $\neq \emptyset$ τομή. Αν $|J| < n+1$ από την υπόθεση έχουμε ότι η $\{A_j, j \in J\}$ έχει $\neq \emptyset$ τομή. Συνεπώς $\forall$ $J \subseteq I$ πεπερασμένο $\bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$.

Έστω $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$. Σταθεροποιώ $i \in I$ τότε $A_i \cap \left(\bigcap_{i \neq j} A_j\right) = \emptyset \Rightarrow$

$$A_i \subseteq \left(\bigcap_{j \neq i} A_j\right)^c = \bigcup_{j \neq i} A_j^c$$

και A_i συμπαγές $\{A_j^c \mid j \in I \setminus \{i\}\}$ κάλυψη, άρα υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη δηλ. $\exists$ $F \subseteq I \setminus \{i\}$ ώστε

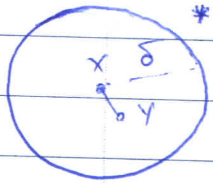
$$A_i \subseteq \bigcup_{j \in F} A_j^c \Leftrightarrow A_i \subseteq \left(\bigcap_{j \in F} A_j\right)^c \Leftrightarrow A_i \cap \left(\bigcap_{j \in F} A_j\right) = \emptyset \Leftrightarrow$$

$\bigcap_{j \in F \cup \{i\}} A_j = \emptyset$ άτοπο αφού το $F \cup \{i\}$ είναι πεπερασμένο

• ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΚΥΡΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΣΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΧΩΡΟ

1) $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό $\Rightarrow$ $conv(A)$ ανοιχτό.

Λύση: Έστω $x \in conv(A)$ άρα $\exists$ουν $a_1, \dots, a_m \in A$, $t_i > 0$ με $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$, ώστε $x = t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_m a_m$. A ανοιχτό άρα $\forall\, i = 1, \dots, m$ $\exists\, \delta_i > 0$ ώστε $B(a_i, \delta_i) \subseteq A$. Επιλέγουμε $\delta = \min\{\delta_i : i = 1, \dots, m\}$ και Θ.δ.ο $B(x, \delta) \subseteq conv(A)$. Έστω $y \in B(x, \delta)$ τότε αν $u = y - x$ τότε το



* $a_i + u = a_i + y - x \in B(a_i, \delta) \subseteq B(a_i, \delta_i) \subseteq A$ $\forall\, i = 1, \dots, m$

Άρα $\sum_{i=1}^{m} t_i (a_i + u) \in conv(A)$

Όμως $\sum_{i=1}^{m} t_i (a_i + u) = \sum_{i=1}^{m} t_i a_i + \left(\sum_{i=1}^{m} t_i\right) u = x + u = y$ άρα $y \in conv(A)$.

(* : $\|u\|_2 = \|y - x\|_2 < \delta$, $a_i \in B(a_i, \delta)$)

2) (α) $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο. $diam(S) = diam(conv(S))$

(β) $\emptyset \neq S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $conv(T + S) = conv(T) + conv(S)$

(γ) $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $conv(int(S)) \subseteq int(conv(S))$ Πότε ισότητα?

Λύση: (α) Ισχύει ότι $S \subseteq conv(S) \Rightarrow diam(S) \leq diam(conv(S))$

Έστω $x, y \in conv(S)$ $\Rightarrow$ $\exists$ουν $u_i, v_j \in S$ και $t_i, s_j > 0$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k)$ με $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$, $\sum_{j=1}^{k} s_j = 1$ ώστε $x = \sum_{i=1}^{m} t_i u_i$ και $y = \sum_{j=1}^{k} s_j v_j$. Τότε

$$\|x - y\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{m} t_i u_i - \sum_{j=1}^{k} s_j v_j \right\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{m} t_i \left(\sum_{j=1}^{k} s_j\right) u_i - \sum_{j=1}^{k} s_j \left(\sum_{i=1}^{m} t_i\right) v_j \right\|_2 =$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} t_i s_j u_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} s_j t_i v_j \right\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} t_i s_j (u_i - v_j) \right\|_2 \leq$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} t_i s_j \|u_i - v_j\|_2 \leq diam(S) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} t_i s_j \right) = diam(S)$$

άρα $diam(conv(S)) \leq diam(S)$

(β) Έστω $x \in conv(S + T)$ τότε $\exists$ουν $y_i \in S + T$ και $t_i > 0$ με $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$: $x = \sum_{i=1}^{m} t_i y_i$. Αλλά $y_i \in S + T$ άρα $\exists$ουν $u_i \in S$ και $v_i \in T$ τ.ώ: $y_i = u_i + v_i$, άρα $x = \sum_{i=1}^{m} t_i (u_i + v_i) = \sum_{i=1}^{m} t_i u_i + \sum_{i=1}^{m} t_i v_i \in$ $\in conv(S) + conv(T)$. Αντίστροφα, έστω $y \in conv(S)$ και $z \in conv(T)$ τότε $\exists$ουν t_i, s_j με $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$, $\sum_{j=1}^{k} s_j = 1$ και $u_i \in S$, $v_j \in T$

τώ: $y=\sum_{i=1}^{m} t_i u_i$ και $z=\sum_{j=1}^{k} s_j v_j$, οπότε $y+z=\sum_{i=1}^{m} t_i u_i+\sum_{j=1}^{k} s_j v_j=$

$=\sum_{i=1}^{m} t_i\left(\sum_{j=1}^{k} s_j\right)u_i+\sum_{j=1}^{k} s_j\left(\sum_{i=1}^{m} t_i\right)v_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} t_i s_j u_i+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} s_j t_i v_j=$

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} t_i s_j (u_i+v_j)\in conv(S+T)$ αφού $u_i+v_j\in S+T$ και $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} t_i s_j=1$

Άρα $conv(S+T)=conv(S)+conv(T)$

γ) $int(S)\subseteq S\Rightarrow conv(int(S))\subseteq conv(S)$ ① και από (α) αφού $int(S)$ ανοιχτό $\Rightarrow conv(int(S))$ ανοιχτό άρα $conv(int(S))\subseteq int(conv(S))$ λόγω της ①. Ο εγκλεισμός γίνεται γνήσιος. Π.χ. αν $S=\{0,1\}$ στο $\mathbb{R}$ τότε $int(S)=\emptyset$ και $conv(S)=[0,1]$ άρα $conv(int(S))=\emptyset$ και $int(conv(S))=$ $=(0,1)$.

3). $S\subset\mathbb{R}^n$ και $x,y\in\mathbb{R}^n$ $x,y\notin conv(S)$. Αν $x\in conv(S\cup\{y\})$ και $y\in conv(S\cup\{x\})$ $\Rightarrow x=y$

Λύση: Έστω $x\neq y$, αφού $x\in conv(S\cup\{y\})$ $\exists$ αν $u_i\in S$ και $t_i,t\geq 0$ με $\left(\sum_{i=1}^{m} t_i\right)+t=1$: $x=\left(\sum_{i=1}^{m} t_i u_i\right)+ty$. Είναι $t\neq 0$ αλλιώς $x\in conv(S)$ άτοπο. Όμοια αφού $y\in conv(S\cup\{x\})$ και $x\neq y$ υπάρχουν $v_j\in S$ και $s_j\geq 0$, $0<s<1$: $\left(\sum_{j=1}^{k} s_j\right)+s=1$ και $y=\sum_{j=1}^{k} s_j v_j+sx$, οπότε με αντικατάσταση

$$x=\left(\sum_{i=1}^{m} t_i u_i\right)+\sum_{j=1}^{k} t s_j v_j+tsx\Rightarrow(1-ts)x=\sum_{i=1}^{m} t_i u_i+\sum_{j=1}^{k} t s_j v_j$$

$$\Rightarrow x=\sum_{i=1}^{m}\frac{t_i}{1-ts}u_i+\sum_{j=1}^{k}\frac{ts_j}{1-ts}v_j \quad \text{και}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{t_i}{1-ts}+\sum_{j=1}^{k}\frac{ts_j}{1-ts}=\frac{1}{1-ts}\cdot\sum_{i=1}^{m} t_i+\frac{t}{1-ts}\cdot\sum_{j=1}^{k} s_j=$$

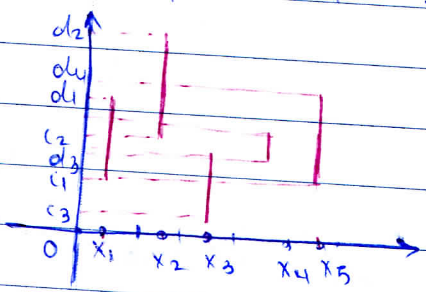
$$\frac{1}{1-ts}\cdot(1-t)+\frac{t}{1-ts}(1-s)=\frac{1-\cancel{t}+\cancel{t}-ts}{1-ts}=1$$

άρα $x\in conv(S)$ άτοπο. Συνεπώς $x=y$.

4). Δίνονται ευθύγραμμα τμήματα $I_1, I_2, \dots I_m\in\mathbb{R}^2$ περιέχονται σε διακεκριμένες παράλληλες ευθείες $l_1,l_2,\dots,l_m$. $\forall\, i_1,i_2,i_3\in\{1,\dots,m\}$ $\exists$ ευθεία που τέμνει τα I_{i_1},I_{i_2},I_{i_3}. Ν.δ.ο. $\exists$ ευθεία που τα τέμνει όλα.

Λύση: Υποθέτουμε ότι τα $I_1,\dots,I_m$ είναι παράλληλα στον yy'. Αφού περιέχονται σε διακεκριμένες ευθείες, υπάρχουν $x_1,x_2,\dots,x_m$ διακεκριμένα και $c_i<d_i$ $i=1,\dots,m$ στο $\mathbb{R}$: $I_i=\{(x_i,y): c_i\le y\le d_i\}$ $i=1,\dots,m$. Ορίζουμε $C_1,\dots,C_m\subseteq\mathbb{R}^2$: $C_i=\{(a,b): c_i\le ax_i+b\le d_i\}$

Π.χ.



Δηλαδή $(a,b)\in C_i \iff$ η $y=ax+b$ τέμνει το I_i. $\forall\, i_1,i_2,i_3\in\{1,\dots,m\}$ ισχύει $C_{i_1}\cap C_{i_2}\cap C_{i_3}\neq\emptyset$ και τα C_i είναι κυρτά σύνολα. Πράγματι αν $(a,b)\in C_i$ και $(a_1,b_1)\in C_i$ τότε $c_i\le ax_i+b\le d_i$ και $c_i\le a_1x_i+b_1\le d_i$, οπότε $\forall\, t\in(0,1)$ ισχύει ότι:

$c_i=(1-t)c_i+tc_i\le(1-t)(ax_i+b)+t(a_1x_i+b_1)\le(1-t)d_i+td_i=d_i$

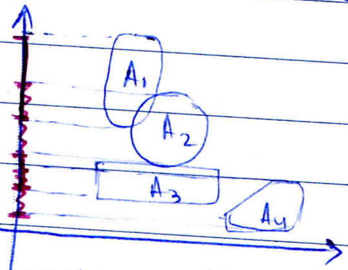
και $(1-t)(ax_i+b)+t(a_1x_i+b_1)=[(1-t)a+ta_1]x_i+[(1-t)b+tb_1]$

οπότε $((1-t)a+ta_1,(1-t)b+tb_1)\in C_i$

5). $A_1,\dots,A_m\subseteq\mathbb{R}^2$ κυρτά. $\forall\, i,j\in\{1,\dots,m\}$ $\exists$ ευθεία $\parallel x'x$ που τέμνει A_i και A_j. Ν.δ.ο $\exists$ ευθεία $\parallel x'x$ που τέμνει όλα τα A_i $i=1,\dots,m$.

Λύση:

Π.χ.



Τα A_i τα ανάγω στο $\mathbb{R}$ για να εφαρμόσω το Helly μέσω προβολής.

$\forall\, i=1,\dots,m$ ορίζουμε $B_i=\{t\in\mathbb{R} : \exists x\in\mathbb{R}$ ώστε $(t,x)\in A_i\}$ (οι προβολές των A_i). Τα B_i είναι κυρτά (απλό) υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και από υπόθεση $B_i\cap B_j\neq\emptyset$ $\forall\, i\neq j$ άρα από Helly $B_1\cap\dots\cap B_m\neq\emptyset \Rightarrow$ $\exists$ ευθεία $\parallel xx'$ που τέμνει όλα τα A_i.

6) Έστω $m\ge n+1$, $d>0$ και $C_1,\dots,C_m\neq\emptyset$ κυρτά $\subseteq\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα: αν $1\le i_1<\dots<i_{n+1}\le m$ τότε $\exists\, y\in\mathbb{R}^n$ ώστε $d(y,C_{i_j})<d$ $\forall\, j=1,\dots,n+1$. Δ.ο $\exists\, x\in\mathbb{R}^n$: $d(x,C_i)\le d$ $\forall\, i=1,\dots,m$.

Λύση: $\forall\, i=1,\dots,m$ ορίζουμε τα σύνολα $B_i=\{y\in\mathbb{R}^n : d(y,C_i)\le d\}$. Τότε τα B_i είναι κυρτά. Πράγματι αν $y_1,y_2\in B_i$ τότε $d(y_1,C_i)\le d$ και $d(y_2,C_i)\le d$ και άρα (έστω $\varepsilon>0$) υπάρχουν $x_1,x_2\in C_i$ ώστε $\|y_1-x_1\|_2<d+\varepsilon$ και $\|y_2-x_2\|_2<d+\varepsilon$. Έστω $t\in(0,1)$ τότε αφού C_i κυρτό έχουμε ότι $(1-t)x_1+tx_2\in C_i$ και $\|(1-t)y_1+ty_2-(1-t)x_1-tx_2\|_2\le$

$\le\|(1-t)(y_1-x_1)\|_2+\|t(y_2-x_2)\|_2\le(1-t)(d+\varepsilon)+t(d+\varepsilon)=d+\varepsilon$

άρα $(1-t)y_1+ty_2\in B_i$ για και το ε ήταν τυχόν.

Από υπόθεση $\forall\, 1 \le i_1 < \dots < i_{n+1} \le m \ \bigcap_{j=1}^{n+1} B_{i_j} \neq \emptyset$ άρα από Helly $\bigcap_{i=1}^{m} B_i \neq \emptyset \iff$
$\exists\, x \in \mathbb{R}^n : d(x, C_i) \le d \ \forall\, i = 1, \dots, m$.

7.) $\theta_1, \dots, \theta_k \in S^{n-1}$ και $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το κυρτό πολύεδρο $P = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta_i \rangle \le t_i\} \neq \emptyset$ και φραγμένο. Δ.ο αν το υπερεπίπεδο $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = t\}$ $(\theta \in S^{n-1}, t \in \mathbb{R})$ ικανοποιεί την $P \cap H = \emptyset \Rightarrow$ $\exists$ουν $1 \le i_1 < \dots < i_n \le k$ ώστε το $P_1 = \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta_{i_j} \rangle \le t_{i_j}\}$ να ικανοποιεί τις $P_1 \supseteq P$ και $P_1 \cap H = \emptyset$

Λύση: Θέτουμε $H = C_0$ και $C_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta_i \rangle \le t_i\}$ $i = 1, \dots, k$. Τα C_i είναι κυρτά και από υπόθεση έχουμε $C_0 \cap C_1 \cap \dots \cap C_k = \emptyset$. Από το Θ. Helly $\exists$ουν $0 \le i_0 < i_1 < \dots < i_n \le k$ ώστε $C_{i_0} \cap C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_n} = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι $i_0 = 0$ αλλιώς $C_{i_0} \cap \dots \cap C_{i_n} \supseteq \bigcap_{i=1}^{k} C_i = P \neq \emptyset$.
Θέτουμε $P_1 = \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta_{i_j} \rangle \le t_{i_j}\}$. Τότε προφανώς $P_1 \supseteq P$ και $H \cap P_1 = C_0 \cap C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_n} = \emptyset$.

8.) $A_1, \dots, A_m \neq \emptyset$ κυρτά $\subseteq \mathbb{R}^n$ και έστω $k \le n+1$. $\forall\, i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ το $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \neq \emptyset$. Δ.ο αν F είναι ένας $(n-k+1)$-διάστατος γραμμικός υπόχωρος στο $\mathbb{R}^n$ τότε $\exists\, u \in \mathbb{R}^n$ ώστε η μεταφορά $F+u$ του F να τέμνει όλα τα σύνολα $A_1, \dots, A_m$

Λύση: Θεωρούμε τον κάθετο υπόχωρο $F^\perp$ του F. Τότε $\dim(F^\perp) = k-1$
$\forall\, i = 1, \dots, m$ ορίζουμε $B_i = \{x \in F^\perp : \exists\, y \in F$ τ.ώ $x + y \in A_i\}$, δηλ. C_i είναι η "προβολή" του A_i στον $F^\perp$. A_i κυρτά $\Rightarrow C_i$ κυρτά $\subseteq F^\perp$
Από υπόθεση, $\forall\, i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ $\exists\, z \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$. Αλλά $z = x + y$ όπου $x \in F^\perp$ και $y \in F$ έχουμε ότι $x \in B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}$.
Αφού $\dim(F^\perp) = k-1$, τα $B_1, \dots, B_m$ ικανοποιούν την υπόθεση του θεωρήματος Helly, άρα $B_1 \cap \dots \cap B_m \neq 0$. Έστω $u \in F^\perp$ με $u \in B_1 \cap \dots \cap B_m$, $\forall\, i = 1, \dots, m$ $\exists\, y_i \in F : u + y_i \in A_i$, δηλ. $(u+F) \cap A_i \neq \emptyset$ $\forall\, i = 1, \dots, m$.

9.) Έστω $A_1, \ldots, A_m$ και C κυρτά $\subseteq \mathbb{R}^n$

(α) Δ.ο $\forall i=1,\ldots,m$ το $B_i = \{u \in \mathbb{R}^n : A_i \cap (C+u) \neq \emptyset\}$ είναι κυρτό

(β) Υποθέτουμε ότι $\forall i_1, \ldots, i_{n+1} \in \{1,\ldots,m\}$ $\exists u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $C+u$ να τέμνει τα $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{n+1}}$. Δ.ο $\exists u \in \mathbb{R}^n$: $C+u$ τέμνει όλα τα A_i.

Λύση: (α) $B_i = A_i - C$, A_i, C κυρτά $\Rightarrow$ B_i κυρτό.

(β) $\forall i_1, \ldots, i_{n+1}$ $B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_{n+1}} \neq \emptyset$, B_i κυρτά άρα $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m \neq \emptyset$ από Helly, άρα $\exists u \in \mathbb{R}^n$ ώστε το $C+u$ να τέμνει κάθε A_i.

10.) Έστω $m \geq n+1$ και $K, C_1, \ldots, C_m$ κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $\forall 1 \leq i_1 < \ldots < i_{n+1} \leq m$ $\exists x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + K \subseteq C_{i_1} \cap \ldots \cap C_{i_{n+1}}$. Δ.ο $\exists x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $x + K \subseteq C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_m$.

Λύση: $\forall i=1,\ldots,m$ ορίζουμε τα σύνολα $A_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x + K \subseteq C_i\}$. Τα A_i είναι κυρτά. Πράγματι, έστω $x, y \in A_i$ και $t \in (0,1)$, $\forall u \in K$ ισχύει $(1-t)x + ty + u = (1-t)(x+u) + t(y+u) \in C_i$ γιατί το C_i είναι κυρτό και $x+u \in C_i$, $y+u \in C_i$. Από υπόθεση έχουμε ότι $\forall 1 \leq i_1 < \ldots < i_{n+1} \leq m$ $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_{n+1}} \neq \emptyset$ και άρα από Helly $\exists x \in \mathbb{R}^n$: $x \in A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_m$ δηλαδή $x + K \subseteq C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_m$.