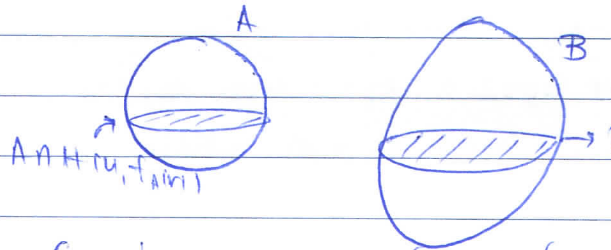
με το μετασχηματισμό έχουμε: $\int_0^1 V_{d-1}((1-\lambda)A+\lambda B)_{f_\lambda(r)} \cdot f_\lambda'(r)\,dr \geq$

$\geq \int_0^1 V_{d-1}((1-\lambda)A_{f_A(r)} + \lambda B_{f_B(r)})\, f_\lambda'(r)\,dr \geq$ (επαγωγική υπόθεση)

$\geq \int_0^1 \left[(1-\lambda)\, V_{d-1}^{1/d-1}(A_{f_A(r)}) + \lambda\, V_{d-1}^{1/d-1}(B_{f_B(r)})\right]^{d-1} \left[(1-\lambda)\frac{1}{V_{d-1}(A_{f_A(r)})} + \lambda \frac{1}{V_{d-1}(B_{f_B(r)})}\right] dr \geq$

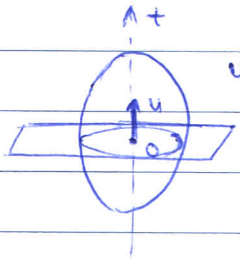
$\geq \int_0^1 1\,dr = 1$ (ανισότητα στην αρχή)

• Για να έχουμε ισότητα παραπάνω θα πρέπει $V_{d-1}(\underbrace{A \cap H(u, f_A(r))}_{\text{συμβ } A_{f_A(r)}}) = V_{d-1}(B \cap H(u, f_B(r)))$



Επομένως πρέπει $f_A'(r) = f_B'(r)$ $r \in (0,1)$ και άρα $f_A = f_B + \vartheta$ $\vartheta =$ σταθερό

όπου $f_A(1) = d_A = h_A(u) = h_B(u) + \vartheta$ $(\vartheta = \vartheta_u)$



$u = (0, 0, \ldots, 1)$ ορίζουμε νέο σύστημα συντεταγμένων

$\rightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) = y$ $\quad x_A = \left(\int_A x_1\,dV, \ldots, \int_A t\,dV\right)$

↑ κέντρο βάρους.

α' - περίπτωση: $x_A = x_B$

Υπολογίζουμε $\langle x_A, u\rangle = \int_A t\,dV = \int_{c_A}^{d_A} t \cdot V_{d-1}(A \cap H(u,t))\,dt \overset{t=f_A(r)}{=\!=}$

$= \int_0^1 \left[f_A(r) \cdot \frac{1}{f_A'(r)}\right] \cdot f_A'(r)\,dr = \int_0^1 f_A$

και $x_A = x_B \Rightarrow \int_0^1 f_B = \int_0^1 f_A \overset{f_A = f_B + \vartheta}{\Rightarrow} \vartheta = 0$ $(=\vartheta_u)$

δηλαδή $f_A = f_B$ οπότε $h_A(u) = h_B(u)$.

Το u είχε επιλεγεί τυχαία, συνεπώς $h_A = h_B$.

Επομένως, καθώς τα A, B είναι συμπαγή και κυρτά, $A = B$

β' - περίπτωση: x_A, x_B σε τυχαία θέση.

Τότε τα $A - x_A$; $B - x_B$ έχουν κέντρο βάρους στο 0.

Από την α'-περίπτωση, $A - x_A = B - x_B \Rightarrow A = z_0 + B$
(παράλληλη μετατόπιση)

2η-περίπτωση: $V(A), V(B) > 0$ τυχαίοι

Θέτουμε $A' = \dfrac{A}{V^{1/d}(A)}$, $V(A') = 1$ και $B' = \dfrac{B}{V^{1/d}(B)}$, $V(B') = 1$.

και $\lambda' = \dfrac{\lambda V^{1/d}(B)}{(1-\lambda)V^{1/d}(A) + \lambda V^{1/d}(B)} \in (0,1)$ $(\lambda \in (0,1))$

και $1 - \lambda' = \dfrac{(1-\lambda)V^{1/d}(A)}{(1-\lambda)V^{1/d}(A) + \lambda V^{1/d}(B)}$

Τότε $V((1-\lambda')A' + \lambda' B') \geq 1$ (1η-περίπτωση) και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $A' = z_0' + B'$

Δηλαδή, με αντικατάσταση έχουμε:

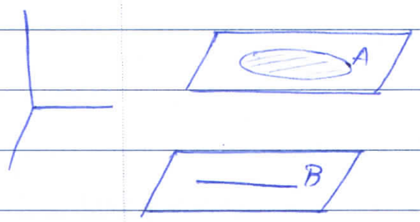
$$V\left(\frac{(1-\lambda)V^{1/d}(A)}{(1-\lambda)V^{1/d}(A) + \lambda V^{1/d}(B)} A' + \frac{\lambda V^{1/d}(B)}{(1-\lambda)V^{1/d}(A) + \lambda V^{1/d}(B)} B'\right) \geq 1$$

ή $V((1-\lambda)A + \lambda B) \geq \left[(1-\lambda)V^{1/d}(A) + \lambda V^{1/d}(B)\right]^d$

και η ισότητα ισχύει όταν $A' = z_0' + B'$ δηλαδή $A = z_0 + \mu B$ $(\mu > 0)$
(για $\mu = 1$ έχουν ίδιο όγκο) ∎

• ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

1. A, B περιέχονται σε παράλληλα υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^d$.



$V_d(A) = V_d(B) = 0$

και

$V_d((1-\lambda)A + \lambda B) = 0$

2. $\dim A, \dim B \leq d-1$. Τότε $V^{1/d}((1-\lambda)A + \lambda B) \geq 0 = (1-\lambda)\underbrace{V^{1/d}(A)}_{=0} + \lambda \underbrace{V^{1/d}(B)}_{=0}$

"=" $V^{1/d}((1-\lambda)A + \lambda B) = 0 \Rightarrow A, B$ είναι σε παράλληλα υπερεπίπεδα.

3. $\dim A \le d-1$, $\dim B = d$

Τότε $V_d(A) = 0$. Θεωρούμε $a \in A$. Τότε έχουμε:

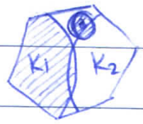
$$V^{1/d}((1-\lambda)A+\lambda B) \geq V^{1/d}((1-\lambda)a+\lambda B) = V^{1/d}(\lambda B) = \lambda V^{1/d}(B) =$$
$$= (1-\lambda)\underbrace{V^{1/d}(A)}_{0} + \lambda V^{1/d}(B)$$

"=": $V((1-\lambda)A+\lambda B) = \lambda^d V(B)$. Τότε το A είναι σημείο (μονοσύνολο).

Πράγματι, αν $a, a' \in A$, $a \neq a'$ τότε:

$$V(\underbrace{(1-\lambda)A+\lambda B}_{\Gamma}) = \lambda^d V(B)$$

Γ



$K_1 = (1-\lambda)a+\lambda B \subseteq \Gamma$

$K_2 = (1-\lambda)a'+\lambda B \subseteq \Gamma$, $K_1 \neq K_2$ $V(K_1) = V(K_2) = V(\Gamma)$

Επομένως λόγω συμπάγειας $K_1 = K_2 = \Gamma$.

• **Για την ισότητα στην ανισότητα Brün-Minkowski:**

Έστω ότι $\exists\, \lambda \in (0,1)$ ώστε:

i) $\dim A = \dim B = d \Rightarrow A = z_0 + \mu B$ (ομοιόθετα)

ii) $\dim A, \dim B \le d-1 \Rightarrow A, B$ σε // υπερεπίπεδα

iii) $\dim A \le d-1$, $\dim B = d \Rightarrow A = \{a\}$

ΠΟΡΙΣΜΑ 1*: A, B κυρτά και συμπαγή $\dim A = \dim B = d$

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(\lambda) = V^{1/d}((1-\lambda)A+\lambda B)$

Τότε η f είναι κοίλη. Γνήσια κοίλη $\Leftrightarrow$ A, B όχι ομοιόθετα

Απόδειξη: Αρκεί για $s, t \in [0,1]$ $\mu \in [0,1]$ να ισχύει:

$f((1-\mu)s+\mu t) \geq (1-\mu)f(s) + \mu f(t)$

$V^{1/d}([1-(1-\mu)s+\mu t]A + [(1-\mu)s+\mu t]B) =$

$V^{1/d}((1-\mu)\underbrace{[(1-s)A+sB]}_{A'} + \mu\underbrace{[(1-t)A+tB]}_{B'}) \geq (1-\mu)f(s)+\mu f(t)$

• **ΠΟΡΙΣΜΑ 2:** $V^{1/d}(\lambda A+\mu B) \geq \lambda V^{1/d}(A) + \mu V^{1/d}(B)$ $\quad \lambda,\mu>0$

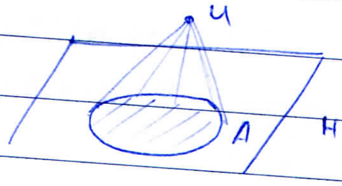
• **ΠΟΡΙΣΜΑ 3:** $V((1-\lambda)A+\lambda B) \geq V^{1-\lambda}(A)\cdot V^{\lambda}(B)$ $\quad \lambda\in(0,1)$
(υπόδειξη: B-M και κοιλότητα του log)

• **ΠΟΡΙΣΜΑ 4:** (Αρχή του Brün)
dim $K = d$, $\|u\|=1$
$f_u(t) = V_{d-1}^{1/d-1}(K\cap H(u,t))$ είναι κοίλη

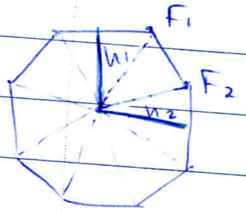
§ Μεικτοί Όγκοι - Ισοπεριμετρικό Πρόβλημα - Ανισότητα.

Χρειαζόμαστε τα ακόλουθα:

i) A, υπερεπίπεδο H, $u \notin H$
$K = \text{conv}\{u, A\}$ $\quad V_d(K) = \frac{1}{d} h V_{d-1}(A)$
(π.χ. για $d=2$ → εμβαδόν τριγώνου



ii) P = πολύτοπο με $F_1,F_2,\dots,F_m$ έδρες, $0 \in$ εσP



$$V(P) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{m} h_i V_{d-1}(F_i)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: P,Q: πολύτοπα $\quad V(\lambda P+\mu Q) = \binom{d}{0}V_0\lambda^d + \binom{d}{1}V_1\lambda^{d-1}\mu + \dots + \binom{d}{d}V_d\mu^d$
όπου $V_0=V(P)$, $V_d=V(Q)$, $V_1 = V_1(\underbrace{P,\dots,P}_{d-1},Q)$, $V_2 = V_2(\underbrace{P,\dots,P}_{d-2},Q,Q)$ $\quad \lambda,\mu>0$
μεικτοί όγκοι $V_i\geq 0$

Απόδειξη: Για $d=1$, $P=[\alpha,\beta]$, $Q=[\gamma,\delta]$ τότε
$\ell(\lambda P+\mu Q) = \lambda \ell(P)+\mu\ell(Q)$
Έστω ότι ισχύει για $d-1$, δηλαδή $V(\lambda P+\mu Q)$ ομογενές πολυώνυμο ως προς λ,μ.
Θεωρούμε $R = \lambda P+\mu Q$: πολύτοπο με $F_1,F_2,\dots,F_m$ έδρες.

$\exists$ ουν $F_1^{(1)}, \dots, F_k^{(1)}$ ακραία σύνολα του P και $F_1^{(2)}, \dots, F_m^{(2)}$ ακραία σύνολα του Q.
ώστε $F_i = \lambda F_i^{(1)} + \mu F_i^{(2)}$ και $h_i = \lambda h_i^{(1)} + \mu h_i^{(2)}$

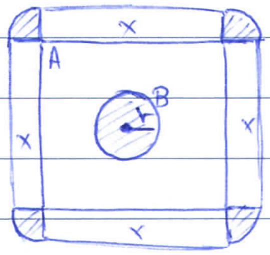
Τότε $V(\lambda P + \mu Q) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{h_i}_{(\lambda h_i^{(1)} + \mu h_i^{(2)})} V(\underbrace{\lambda F_i^{(1)} + \mu F_i^{(2)}}_{\dim \leq d-1})$ $\blacksquare$

$V(\lambda A + \mu B)$, A, B = κυρτά + συμπαγή.
Τότε $V(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} V_i \lambda^{d-i} \mu^i$

(Υπόδειξη: Αν $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A$ $B_n \xrightarrow{n\to\infty} B$ συνέχεια του όγκου
άρα επεκτείνεται, A_n, B_n ακολουθίες κυρτών πολυτόπων).

$V_i \geq 0$ $V(\lambda A + \mu B) = \binom{d}{0} V_0 \lambda^d + \dots + \binom{d}{0} V_d \mu^d$
- $\lambda = 1, \mu = 0, V(A) = V_0$
- $\lambda = 0, \mu = 1, V(B) = V_d$

Παράδειγμα:

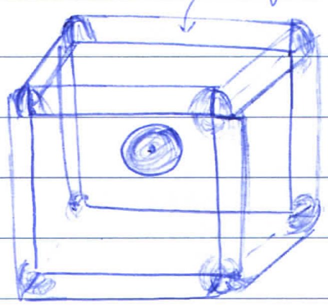


$V(A+B) = ?$

$V(A+B) = \underset{V_0}{V(A)} + \text{περ}(A) \cdot r + \underset{V_1}{V(B)}$

x - γειτονικός όγκος

γειτονικός όγκος



$V(A+B) = V(A) + \underset{r^3}{V(B)} + \text{εμβ}(A) \cdot r + r^2 \cdot c$

$r^2 \cdot c \to \frac{1}{4} V(\text{κυλίνδρου})$

άρα $V(A + rS(0,1))$ = πολυώνυμο του r
αν A σφαίρα δεν θα παρουσιαστούν γειτονικοί όγκοι.

A, B κυρτά, συμπαγή, $\dim A = \dim B = d$

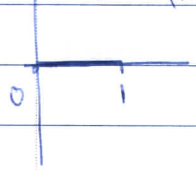
$V_0 = V(A)$, $V_d = V(B)$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $f(\lambda) = V^{1/d}((1-\lambda)A + \lambda B) - (1-\lambda) V^{1/d}(A) - \lambda V^{1/d}(B)$

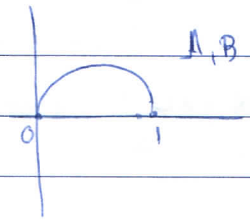
Γνωρίζουμε ότι • $f(\lambda) \geq 0$ (B−M)

- f: κοίλη
- $f(0) = 0 = f(1)$
- Στην περίπτωση που τα A, B είναι ομοιόθετα ισχύει $f \equiv 0$ και αντίστροφα. Ισοδύναμα $\exists \lambda \in (0,1) : f(\lambda) = 0$
- A, B όχι ομοιόθετα $\Longleftrightarrow$ η f είναι γνήσια κοίλη

A,B ομοιόθετα



A,B όχι ομοιόθετα



$\rightsquigarrow$ $V((1-\lambda)A + \lambda B) = \sum_{i=0}^{d} V_i (1-\lambda)^{d-i} \lambda^i$ όπου $V_i \geq 0$, $V_0 = V(A)$, $V_d = V(B)$

και τότε $f(\lambda) = \left(\sum_{i=0}^{d} V_i (1-\lambda)^{d-i} \lambda^i\right)^{1/d} - (1-\lambda) V_0^{1/d} - \lambda V_d^{1/d}$

$f'(0) = V_0^{1/d - 1} [V_1 - V_d^{1/d} V_0^{1 - 1/d}]$

i) $f'(0) < 0$ Αδύνατον $(f(\lambda) \geq 0)$

ii) $f'(0) = 0 \overset{f:\text{κοίλη}}{\Longrightarrow} f' \downarrow$ $f'(\lambda) \leq 0$ $\lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow f$ φθίνουσα $f(0) = 0$ $f \geq 0$ $\Rightarrow f \equiv 0$

$\Rightarrow$ A, B ομοιόθετα και αντίστροφα

iii) $f'(0) > 0 \Rightarrow A, B$ όχι ομοιόθετα

Άρα $V_1 = V_d^{1/d} V_0^{1-1/d} \Longleftrightarrow A, B$ ομοιόθετα

$V_1 > V_d^{1/d} V_0^{1-1/d} \Longleftrightarrow A, B$ όχι ομοιόθετα

• **Ισοπεριμετρική Ανισότητα**

$V_1^d = V_d V_0^{d-1} \Longleftrightarrow A, B$ ομοιόθετα

$V_1^d > V_d V_0^{d-1} \Longleftrightarrow A, B$ όχι ομοιόθετα

- **Ορισμός E(A)** | **Εμβαδόν Επιφάνειας του A**

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(A+\varepsilon S(0,1)) - V(A)}{\varepsilon}$$

$$V(A+\varepsilon S(0,1)) = V(A) + d\,\varepsilon V_1(A,A,\ldots,A,S(0,1)) + \binom{d}{2}\varepsilon^2 V_2 + \cdots + \binom{d}{d}\varepsilon^d V_d$$

Άρα $\frac{V(A+\varepsilon S(0,1)) - V(A)}{\varepsilon} \to d V_1$

και $\boxed{E(A) = d\,V_1(A,A,\ldots,A,S(0,1))}$

Σημείωση: $S = \hat{S}(0,1)$ τότε $V_d(S) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+\frac{d}{2})}$ για $d \geq 1$

$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad x,y>0 \quad (\log(B(\cdot,y)) = \text{κυρτή})$

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt \quad (\log\Gamma = \text{κυρτή})$

$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x)$ (Legendre)

$\Gamma(n+1) = n!$ και Χρήση Fubini

$$A(S(0,1)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{V(S+\varepsilon S) - V(S)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon)^d - 1}{\varepsilon} V(S) \overset{\text{dLH}}{=} d\,V(S)$$

K = κυρτό + συμπαγές $S = \hat{S}(0,1)$

$V_1 = \frac{E(K)}{d} > V_d^{1/d}(S)\, V^{1-1/d}(K)$ K όχι σφαίρα

$$\left[\frac{E(K)}{d}\right]^d > V_d(S)\, V^{d-1}(K)$$

$\left[\frac{E(K)}{E(S)}\right]^d > \left[\frac{V(K)}{V(S)}\right]^{d-1}$ K δεν είναι σφαίρα.

$\left[\frac{E(K)}{E(S)}\right]^d = \left[\frac{V(K)}{V(S)}\right]^{d-1}$ αν το K είναι σφαίρα

• **ΘΕΩΡΗΜΑ** (Λύση Ισοπεριμετρικού Προβλήματος)

1) Έστω $V(K) = V(S)$. Τότε $E(K) \geq E(S)$ με ισότητα αν $K = S(0,1) + z_0$.

Γενικά: Η σφαίρα όγκου V έχει το ελάχιστο εμβαδόν επιφανείας από όλα τα (κυρτά + συμπαγή) στερεά ίδιου όγκου

2) Έστω ότι $E(K) = E(S)$. Τότε $V(K) \leq V(S)$ με ισότητα αν $K = S(0,1) + z_0$