Ορισμοί

1) Αν $P=\operatorname{conv}\{z_1,z_2,\dots,z_k\}$ τότε το P ονομάζεται πολύτοπο

$P=$ κυρτό

$P=$ συμπαγές ($M=\{z_1,\dots,z_k\}$ συμπαγές $\overset{Θ.Κ}{\Rightarrow}$ $P=$ συμπαγές)

Τα $\operatorname{ext} P \subseteq \{z_1,z_2,\dots,z_k\}$ (Θεώρημα Minkowski)

Έστω $\operatorname{ext} P=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\subseteq\{z_1,z_2,\dots,z_k\}$

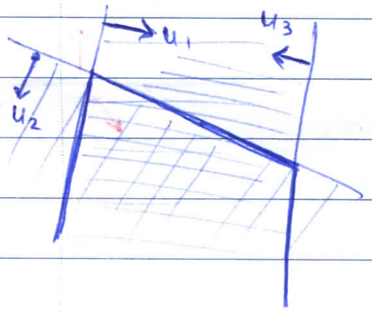
$\exp P \subseteq \operatorname{ext} P \subseteq \overline{\exp P}$ δηλαδή κάθε ακραίο σημείο είναι και εκτεθειμένο.

Αν $\dim P=2$ τότε P πολύγωνο.

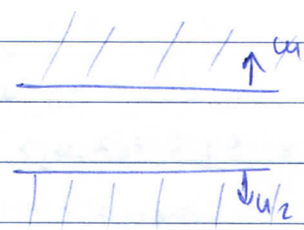
2) $Q=\bigcap_{i=1}^{k}\{y:\langle y,u_i\rangle \le c_i\}$ $u_i\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ και $c_i\in\mathbb{R}$.

Αν το $Q\neq\emptyset$ τότε το Q θα το λέμε πολύεδρο.

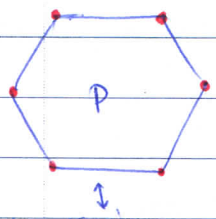
$Q=$ κυρτό $+$ κλειστό



ή

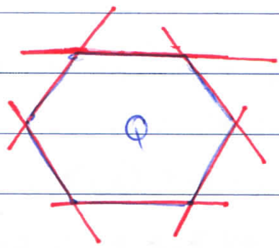


$\dim Q=n$, $\operatorname{bd} Q \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}\{y:\langle y,u_i\rangle = c_i\}$



φραγμένο πολύεδρο

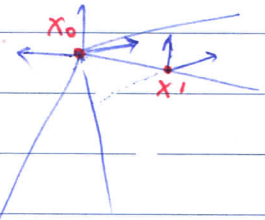
ή

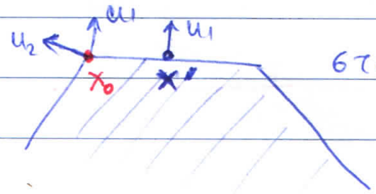


Λήμμα 1: $Q = \bigcap_{i=1}^{k} \{y : \langle y, u_i\rangle \le c_i\}$ πολύεδρο, $\dim Q = n$

$y \in \mathrm{bd}\, Q$.

Π.χ.





στο $\mathbb{R}^2$

$I(y) = \{i \in \{1,\dots,k\} : \langle y, u_i\rangle = c_i\} \neq \emptyset$

→ ΤΕΕΙ:

(i) $\mathrm{span}\{u_i : i \in I(y)\} = \mathbb{R}^n$

(ii) $y \in \mathrm{ext}\, Q$.

Απόδειξη: (i) ⇒ (ii): Έστω $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ $y_1, y_2 \in P$

Έστω $i \in I(y)$ τότε $c_i = \langle y, u_i\rangle = \frac{1}{2}\langle y_1, u_i\rangle + \frac{1}{2}\langle y_2, u_i\rangle \le \frac{1}{2}c_i + \frac{1}{2}c_i = c_i$

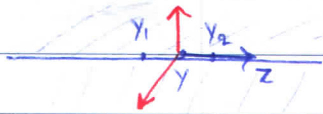
Άρα πρέπει $\langle y_1, u_i\rangle = \langle y_2, u_i\rangle = c_i$ επομένως $\langle y_1 - y_2, u_i\rangle = 0$ $\forall i \in I(y)$

Επειδή $\mathrm{span}\{u_i : i \in I(y)\} = \mathbb{R}^n$ έπεται ότι $y_1 - y_2 \perp \mathbb{R}^n$ ⇒

$y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$, άρα $y \in \mathrm{ext}\, Q$.

(ii) ⇒ (i): Έστω ότι $\mathrm{span}\{u_i : i \in I(y)\} \subsetneq \mathbb{R}^n$

Άρα $\exists z \neq 0$ και $\langle u_i, z\rangle = 0$ $\forall i \in I(y)$



Έστω $j \notin I(y)$, δηλαδή $\langle y, u_j\rangle < c_j$ συνεπώς:

$\exists \varepsilon_0 > 0$ ώστε $\langle y \pm \varepsilon_0 z, u_j\rangle < c_j$ (μπάλα)

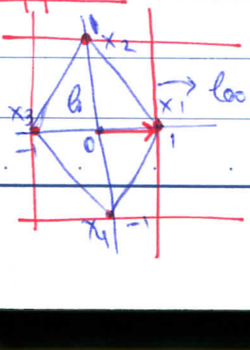
Αν $i \in I(y)$ $\langle y \pm \varepsilon_0 z, u_i\rangle = \langle y, u_i\rangle = c_i$

Τελικά $\forall i \in \{1,\dots,k\}$ $\langle y \pm \varepsilon_0 z, u_i\rangle \le c_i$ και άρα έπεται ότι

$\underbrace{y + \varepsilon_0 z}_{= y_1}, \underbrace{y - \varepsilon_0 z}_{= y_2} \in Q$, $y + \varepsilon_0 z \neq y - \varepsilon_0 z$

Οπότε $y = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$, $y_1, y_2 \in Q$ και άρα y όχι ακραίο σημείο.

Λήμμα 2: $P = \mathrm{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_v\}$ $x_i \in \mathrm{ext}\, P$, $0 \in \mathrm{int}\, P$



Τότε $P^\circ = \{y : \langle y, x_i\rangle \le 1,\ i = 1, 2, \dots, v\} = \bigcap_{i=1}^{v} \{x_i\}^\circ$

Απόδειξη: $P^\circ = \bigcap_{x\in P} \{y : \langle x,y\rangle \le 1\} = \bigcap_{x\in P} \{x\}^\circ$

$\bigcap_{x\in P} \{x\}^\circ \subseteq \bigcap_{i=1}^{\nu} \{x_i\}^\circ$

Έστω $y \in \mathbb{R}^n$: $\langle y, x_i\rangle \le 1$ $i=1,\dots,\nu$

$x\in P$ $x = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i x_i$ $\lambda_i \ge 0$ $\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i = 1$

Τότε $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \underbrace{\langle x_i, y\rangle}_{\ge 0} \le \sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i = 1$

Άρα $y \in \{x\}^\circ$ $\forall x\in P$ (x ήταν τυχόν).

Τελικά P = πολύτοπο $\overset{\Rightarrow}{\text{τότε}}$ P° = φραγμένο πολύεδρο !

ΘΕΩΡΗΜΑ : Σχέση Πολυτόπων-Πολυέδρων

$P \subseteq \mathbb{R}^n$ ΤΕΕΙ

i) P φραγμένο πολύεδρο

ii) P πολύτοπο

Απόδειξη: (i) ⇒ (ii) : $P = \bigcap_{i=1}^{k} \{y : \langle y, u_i\rangle \le c_i\}$

P = φραγμένο + κλειστό.

Για να είναι το P πολύτοπο αρκεί ν.δ.ο $|\text{ext } P| < +\infty$

Έστω $x \in \text{ext } P$ αντιστοιχεί $\{u_1, \dots, u_n\}$ γραμ. ανεξάρτητο

Όμως αριθμός των n-ανεξάρτητων υποσυνόλων της παραπάνω μορφής είναι το πολύ $\binom{k}{n}$ Άρα $|\text{ext } P| \le \binom{k}{n}$

(ii) ⇒ (i) : $0 \in \text{εσ } P$, $P = \text{conv}\{x_1, \dots, x_\nu\}$

Τότε (Λήμμα 2) P° = πολύεδρο + φραγμένο ($0 \in \text{εσ}P$ πρόταση)

$\overset{i)\Rightarrow ii)}{\Longrightarrow}$ P° = πολύτοπο + ($0 \in \text{εσ}P^\circ$)

$\overset{\Lambda.2}{\Longrightarrow}$ $P^{\circ\circ}$ = πολύεδρο + φραγμένο

δηλαδή το P ($= P^{\circ\circ}$) είναι πολύεδρο φραγμένο.

ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ :

- Τομή πολυτόπων = πολύτοπο
- Τομή πολυτόπου με affine χώρο είναι πολύτοπο
- A, B πολύεδρα ⇒ A + B = πολύεδρο
- Προβολή πολυτόπου είναι πολύτοπο
- Έδρες πολυτόπου είναι πολύτοπα

δηλ. P = πολύτοπο, f_0 = # ακραίων σημείων

f_1 = # 1-εδρών f_2 = # 2-εδρών

γενικά f_{n-1} = # $(n-1)$-εδρών

$0 < f_i < \infty$

ΤΥΧΑΙΟΙ??

Εξίσωση Euler-Poincare: $f_{-1} = 1$, $f_n = 1$

Το $\mathbf{f} = (f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_n)$ είναι το $\mathbf{f}$ διάνυσμα του πολυτόπου P

$$f_{-1} - f_0 + f_1 - f_2 + \dots + (-1)^{n+1} f_n = 0$$

Euler (1752): $n = 3$ $1 - \underbrace{V}_{f_0} + \underbrace{E}_{f_1} - \underbrace{F}_{f_2} + 1 = 0$

dim $P \geq 3$ ο Poincare 1899.

Ερώτημα: Άνω φράγμα
(Motzkin 1957)

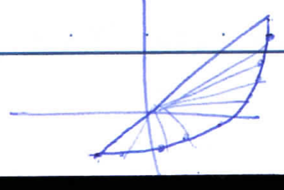
Από όλα τα πολύτοπα του $\mathbb{R}^n$ με $f_0 = k (\geq n+1)$
ποια είναι εκείνα που έχουν το μεγαλύτερο αριθμό f_ν ν-εδρών?

→ Τα κυκλικά έχουν το μέγιστο f_ν $\nu \in \{1, \dots, n-1\}$ από όλα τα
πολ. με $f_0 = k$
(h-διαν.)

→ $\bar{r}(t) = (t, t^2, \dots, t^n) \in (\mathbb{R}^n)$ $t \in \mathbb{R}$ καμπύλη ροπής

$t_0 < t_1 < \dots < t_k$

conv$\{\bar{r}(t_i), i = 1 \dots k\}$



• Εφαρμογή Κυρτό / Γραμ. Προγραμματισμό

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x) = a \cdot x + c = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + c$

$\max\{f(x) : x \in Q\}$ όπου $Q = \{y : Ay \le b\} = \left\{ (y_1, \dots, y_n) : \begin{matrix} \gamma_{11}y_1 + \dots + \gamma_{1n}y_n \le b_1 \\ \vdots \\ \gamma_{k1}y_1 + \dots + \gamma_{kn}y_n \le b_k \end{matrix} \right\}$

άρα Q πολύεδρο. Υποθέτουμε ότι Q είναι και φραγμένο $\Rightarrow$ Q πολύτοπο

$Q = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_\nu\}$

$\exists\, x_{i_0} \in \operatorname{ext} Q : f(x_{i_0}) = \max\{f(x) : x \in Q\}$.

• ΠΟΛΥΤΟΠΑ - ΠΟΛΥΕΔΡΑ

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ $K \neq \emptyset$ κυρτό. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το K είναι πολύτοπο

(ii) Το K είναι φραγμένο πολύεδρο

• ΑΝΟΙΧΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΟΛΥΤΟΠΑ

1. **Εικασία του 3^d:** Για κάθε συμμετρικό d-πολύτοπο ισχύει $f_0 + f_1 + \dots + f_{d-1} \geq 3^d$

2. **Εικασία του κύβου simplex:** Έστω $k \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $N(k) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε d-πολύτοπο με $d \geq N(k)$ έχει τουλάχιστον μια k-έδρα που είναι simplex ή "κύβος" (συνδυαστικά)

3. **Ερώτηση του Barány:** Ισχύει ότι $f_k(P) \geq \min\{f_0(P), f_{d-1}(P)\}$ για κάθε d-πολύτοπο P και για κάθε $k = 0, 1, \dots, d-1$;

4. **Ευτραφή 4-πολύτοπα:** Υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f_0(P) + f_3(P)}{f_2(P) + f_3(P)} \leq c$ για κάθε 4-πολύτοπο;

5. **Simplicial-simplex 10-πολύτοπο:** Υπάρχει ένα πολύτοπο διάστασης 10, που οι k-έδρες του (με $k \leq 5$) P και του P° να είναι simplex;

- Εντός της μελέτης των πολυτόπων (τομές, προβολές, f-διάνυσμα, h-διάνυσμα) μας απασχολεί ο ρόλος του συνόλου των πολυτόπων στο σύνολο των κυρτών και συμπαγών συνόλων του $\mathbb{R}^d$.
- Συγκεκριμένα, για K κυρτό και συμπαγές, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ μπορούμε να βρούμε πολύτοπο "κοντά" του;

(μια πρώτη προσέγγιση)

- **Πρόταση:** Αν $K \neq \emptyset$ κυρτό, συμπαγές και έστω $\lambda > 1$. Τότε υπάρχει P_λ πολύτοπο με $P_\lambda \subseteq K \subseteq \lambda P_\lambda$

- **Λήμμα 1:** Έστω $A, B, \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, $A, B, \Gamma \neq \emptyset$ όπου το A είναι φραγμένο και το Γ είναι κυρτό και κλειστό με $A + B \subseteq A + \Gamma$. Τότε το $B \subseteq \Gamma$.
  Ιδιαιτέρως, αν το B και το Γ είναι κλειστά και κυρτά και $A + B = A + \Gamma$, τότε $B = \Gamma$

Απόδειξη: Έστω $a_0 \in A$ και έστω $b \in B$ τότε $a_0 + b = a_1 + \gamma_1$ για κάποια $a_1 \in A$ και $\gamma_1 \in \Gamma$. Τώρα $a_1 + b \in A + B \subseteq A + \Gamma$, άρα $a_1 + b = a_2 + \gamma_2$; $a_2 \in A$, $\gamma_2 \in \Gamma$ και επαγωγικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $a_{n-1}, a_n \in A$ και $\gamma_n \in \Gamma$ τέτοια ώστε

$$a_{n-1} + b = a_n + \gamma_n$$

Έχουμε αναλυτικά:

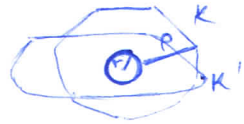
$$a_0 + b = a_1 + \gamma_1$$
$$a_1 + b = a_2 + \gamma_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n-2} + b = a_{n-1} + \gamma_{n-1}$$
$$a_{n-1} + b = a_n + \gamma_n \quad (+)$$
$$a_0 + nb = a_n + (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1} + \gamma_n)$$
$$\Rightarrow b = \frac{a_n - a_0}{n} + \frac{\gamma_1 + \dots + \gamma_n}{n}$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι το A είναι φραγμένο, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε:

$$\frac{\|a_n - a_0\|}{n} \leq \frac{M}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma_1 + \dots + \gamma_n}{n} \in \Gamma \text{ διότι το } \Gamma \text{ είναι κυρτό}$$

Συνεπώς $b = \lim_{n \to \infty} b = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n - a_0}{n} + \frac{\gamma_1 + \dots + \gamma_n}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\gamma_1 + \dots + \gamma_n}{n} \in \overline{\Gamma} = \Gamma$ διότι το Γ είναι κλειστό.

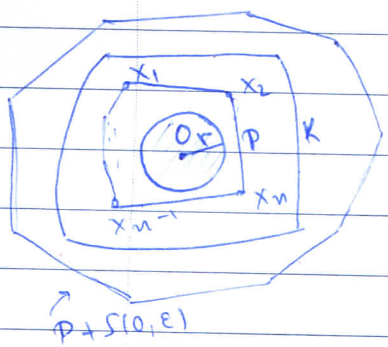
Έπεται άρα ότι $b \in \Gamma$, δηλαδή $B \subseteq \Gamma$.



• **Λήμμα 2:** Έστω K κυρτό και συμπαγές, $\overline{S(0,r)} \subseteq \epsilon\sigma K$.
Τότε: (i) $\rho = dist(bd K, bd\, \overline{S(0,r)}) > 0$
και (ii) αν $0<\epsilon<\rho$, $K \subseteq K' + S(0,\epsilon)$ όπου K' = κυρτό και συμπαγές, τότε $\overline{S(0,r)} \subseteq K'$

Απόδειξη: (i) $bdK \cap bd\,\overline{S(0,r)} = \emptyset$ και άρα $\rho = dist(bdK, bd\,\overline{S(0,r)}) > 0$
(ii) Έστω $0<\epsilon<\rho$ και K' = κυρτό και συμπαγές τέτοιο ώστε $K \subseteq K' + S(0,\epsilon)$
Τότε $\overline{S(0,r)} + S(0,\rho) \subseteq K \subseteq K' + S(0,\epsilon) \subseteq K' + S(0,\rho)$ (διότι $\epsilon<\rho$)
έτσι από το Λήμμα 1 έχουμε $\overline{S(0,r)} \subseteq K'$

• **Απόδειξη της Πρότασης** $(\lambda>1)$: Έστω $0 \in \epsilon\sigma K$ και έστω $\overline{S(0,r)} \subseteq \epsilon\sigma K$ και αυθαίρετα $0<\epsilon<\min\{\rho, (\lambda-1)r\}$ (ρ: λήμμα 2)
K συμπαγές, άρα υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$:
$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i,\epsilon) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} + S(0,\epsilon)$ (*)



Θεωρούμε $P = conv\{x_i : i=1,..,n\} \subseteq K \subseteq P + S(0,\epsilon)$
(αφού $x_i \in K$ και K είναι κυρτό)
Άρα από λήμμα 2, αφού $\epsilon<\rho$ έπεται ότι $\overline{S(0,r)} \subseteq P$
δηλαδή $K \subseteq P + S(0,\epsilon) \subseteq P + S(0,(\lambda-1)r) = P + (\lambda-1)S(0,r) \subseteq P + (\lambda-1)P = \lambda P$
(αν $\lambda, \mu > 0 \Rightarrow \lambda A + \mu A = (\lambda+\mu)A$)

* **Σημειώσεις:** Αν $n \in \mathbb{N}$ θα υπάρχει P_n πολύτοπο τέτοιο ώστε:
$P_n \subseteq K \subseteq (1+\frac{1}{n})P_n \Rightarrow$
$V(P_n) \le V(K) \le (1+\frac{1}{n})^\nu V(P_n)$ όπου $\nu = dim\, \mathbb{R}^\nu$
και $(1+\frac{1}{n})^\nu \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$
δηλαδή υπάρχει ακολουθία πολυτόπων τ.ω.
$\lim_{n\to\infty} V(P_n) = V(K)$

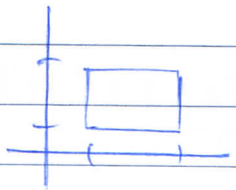
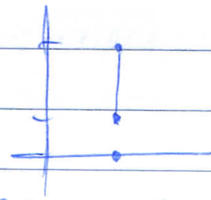
• Όγκος Κυρτού Συνόλου

Έστω I φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ (δηλαδή είναι της μορφής: $[a,b], [a,b), (a,b), (a,b], \emptyset, \{a\}$)

Μήκος ή 1-όγκος του $I :\overset{ορσ}{=} \ell(I) = V_1(I) = b-a$ αν $I \neq \emptyset$

και $V_1(\emptyset) = 0$.

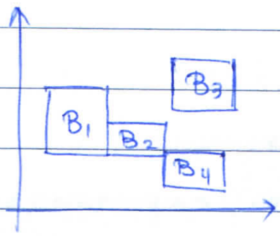
(Ορθογώνιο) $B = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ και $I_i \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένα (διαστήματα) $i = 1, \dots, n$ $I_i \neq \emptyset$

π.χ.:  ή 

και ορίζουμε $V_n(B) = \ell(I_1) \cdot \ell(I_2) \cdots \ell(I_n)$

• $S = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ όπου $\varepsilon\sigma B_j \cap \varepsilon\sigma B_k = \emptyset$ για κάθε $j \neq k$ και B_j = ορθογώνια

δηλαδή

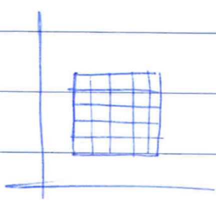


• **Άσκηση:** Αν B ορθογώνιο, $\varepsilon\sigma B \neq \emptyset$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε $V_n(\mathrm{bd}\, B) = 0$.

Ολοκλήρωμα Riemann για $f: B \to \mathbb{R}$ όπου B κλειστό ορθογώνιο, f φραγμένη

Έστω ότι $B = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ όπου $\ell(I_i) \neq 0$ δηλαδή $I_i = [a_i, b_i]$ $\forall i = 1, \dots, n$

Έστω P_i διαμέριση του I_i $\forall i = 1, \dots, n$ τότε η $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$ είναι διαμέριση του B και έστω ότι η P αποτελείται από τα ορθογώνια $B_1, \dots, B_K$



$U(f,P) = \sum_{i=1}^{K} M_i V_n(B_i)$ και $L(f,P) = \sum_{i=1}^{K} m_i V_n(B_i)$

όπου $M_i = \sup\{f(x) : x \in B_i\}$ και $m_i = \inf\{f(x) : x \in B_i\}$

Τότε $L(f,Q) \leq U(f,P)$ για οποιεσδήποτε P, Q διαμερίσεις του B

και ορίζουμε $\underline{\int_B} f\, dV = \sup\{L(f,Q) : Q \in \Delta_B\}$

και $\overline{\int_B} f\,dV = \inf\{U(f,P) : P \in \mathcal{P}_B\}$

Ισχύει ότι $\underline{\int_B} f\,dV \le \overline{\int_B} f\,dV$ (*)

Αν στην (*) έχουμε ισότητα, τότε έπεται ότι $\underline{\int_B} f\,dV = \overline{\int_B} f\,dV = \int_B f\,dV$

Ορισμός V_n για $A \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο

Ορίζουμε $\overline{V_n}(A) = \overline{\int_B} \chi_A\,dV$ και $\underline{V_n}(A) = \underline{\int_B} \chi_A\,dV$ όπου $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in B \setminus A \end{cases}$

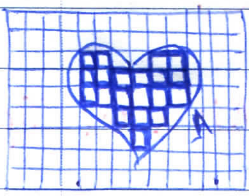
όπου $A \subseteq B$: ορθογώνιο κλειστό.

→ Θα λέμε ότι το A έχει όγκο ή είναι μετρήσιμο (κατά Jordan) $\iff \underline{V_n} = \overline{V_n}$

Π.χ.: 1. Αν $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ τότε $\overline{V_1}(A) = 1$, $\underline{V_1}(A) = 0$.
και άρα δεν είναι κατά Jordan μετρήσιμο

$\underline{V}(A) = \sup\{\sum_{j=1}^{m} V_n(B_j) : B_j \subseteq \text{εσ}A,\ P = B_1 \cup \dots \cup B_k \in \mathcal{P}_B\}$

$\overline{V}(A) = \inf\{\sum_{\nu=1}^{m} V_m(B_\nu) : B_\nu \cap \bar{A} = \emptyset \text{ Η } P = B_1 \cup \dots \cup B_n \in \mathcal{P}_B\}$

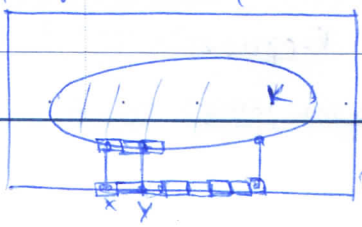


• $\overline{V}(bdA) = \overline{V}(A) - \underline{V}(A)$

Συνεπώς το A είναι κατά Jordan μετρήσιμο $\iff$ $\overline{V}(bdA) = 0$

• **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Αν K είναι κυρτό και φραγμένο τότε το K είναι κατά Jordan μετρήσιμο.

Σκιαγράφηση – Απόδειξη: $bdK = bd\bar{K}$, οπότε θεωρούμε ότι το K είναι συμπαγές και κυρτό ($\overline{V}(bdK) = 0 \iff$ K είναι κατά Jordan μετρήσιμο)



B: ορθογώνιο
$V_2(bdB) = 0$

Ιδέα → χρήση της $\rho_K(x)$!

$|\rho_K(x) - \rho_K(x')| \le |x - x'|$

K κυρτό άρα 1-1 και επί η ρ_K

Εξωτερικό μέτρο Lebesgue και σχέση του με το $V(A)$ (κατά Jordan) όπου A φραγμένο

Ορίζουμε $\forall X \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mu^*(X) \overset{\text{ορσ}}{:=} \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} V_n(B_i) : X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,\ B_i \text{ : ανοιχτά ορθογώνια} \right\}$

$\mu^*([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$ (διότι κάθε $q_i \in (a_i, b_i) \cap \mathbb{Q}$ με $b_i - a_i < \frac{\varepsilon}{2^i}$ άρα $\Sigma(\ ) < \varepsilon$)

- Αν S στοιχειώδες τότε $\mu^*(S) = V(S)$
- Αν S φραγμένο τότε $\mu^*(A) \leq \overline{V}(S)$
- Αν B κλειστό και φραγμένο τότε $\mu^*(B) = \overline{V}(B)$

- Αν K κλειστό και κυρτό και φραγμένο τότε $\mu^*(K) = V(K)$

$\mathcal{M} = \{ A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A\ \mu^*\text{-μετρήσιμο} \}$ σ-άλγεβρα

$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$ $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$

Τότε A : μ^*-μετρήσιμο

$\mu^*|_{\mathcal{M}} = \mu$: μέτρο Lebesgue.

- Ανισότητα Brün-Minkowski, Ισοπεριμετρική ανισότητα, Λύση του Προβλήματος. Εφαρμογές.

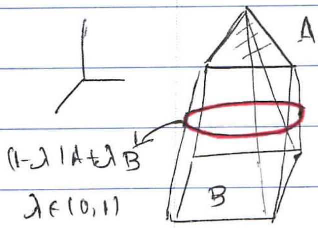
Στον $\mathbb{R}^2$: εάν K συμπαγές + κυρτό, L_K = μήκος της καμπύλης που το περικλείει, E_K εμβαδόν του : ισχύει $L_K^2 \geq 4\pi E_K$, "=" $\iff$ K = κύκλος

ισοδύναμα $\left[\frac{L_K}{L_{\overline{S}(0,1)}} \right]^2 \geq \left[\frac{E_K}{E_{\overline{S}(0,1)}} \right]^{2-1}$ Ισοπεριμετρική Ανισότητα

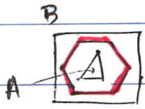
Ερώτημα: $\left[\frac{A_K}{A_{\overline{S}(0,1)}} \right]^d \geq \left[\frac{V(K)}{V(\overline{S}(0,1))} \right]^{d-1}$ $d \geq 2$;; όπου V = όγκος και A = εμβαδόν επιφ. του K.

$A(K) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(K+\varepsilon S) - V(K)}{\varepsilon}$, $S = \bar{S}(0,1)$. $V(\lambda A + \mu B) \overset{?}{\gtrless}$ A, B = κυρτά + συμπ. $\lambda, \mu > 0$.

Εμβαδόν επιφάνειας του K (Minkowski)



ή



Πως λειτουργεί;

$V((1-\lambda)A + \lambda B) \underset{??}{\geq} \min\{V(A), V(B)\}$

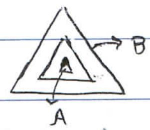
- **Ανισότητα Brün–Minkowski**

A, B κυρτά + συμπαγή, $0 \in \varepsilon\sigma A, \varepsilon\sigma B$ δηλαδή $\dim A = \dim B = d$, $\mathbb{R}^d$

Τότε $V^{1/d}((1-\lambda)A + \lambda B) \geq (1-\lambda) V^{1/d}(A) + \lambda V^{1/d}(B)$, $\lambda \in [0,1]$.

Εαν ισχύει το "=" για κάποιο $\lambda \in [0,1]$ τότε τα A, B είναι ομοιόθετα, δηλαδή $A = z_0 + \mu B$, όπου z_0 σταθερό στο $\mathbb{R}^d$ και $\mu > 0$.

Εαν $A = z_0 + \mu B$ ισχύει το "=".



Χρειαζόμαστε τα εξής:

I i) ΘΘΑΛ: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $x \in [a,b]$, τότε $F' = f$

ii) Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης:

$g : [a,b] \to [\gamma, \delta]$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b) με $g'(x) > 0$ $x \in (a,b)$

τότε $\exists\, f^{-1} : (\gamma, \delta) \to \mathbb{R}$ $(f^{-1})'(r) = \frac{1}{g'(f(r))}$ $r \in (\gamma, \delta)$

iii) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $f \geq 0$ συνεχής $f(x_0) > 0$ τότε $\int_a^b f > 0$.

iv) $a, b > 0$ $\lambda \in (0,1)$ τότε $\left[(1-\lambda) a^{1/\nu} + \lambda b^{1/\nu}\right]\left[(1-\lambda)\frac{1}{a} + \lambda \frac{1}{b}\right]^{1/\nu} \geq 1$

Το "=" ισχύει ανν $a = b$

(log = κοίλη (γνήσια))

II i) Ορισμός του όγκου για $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$ φραγμένο

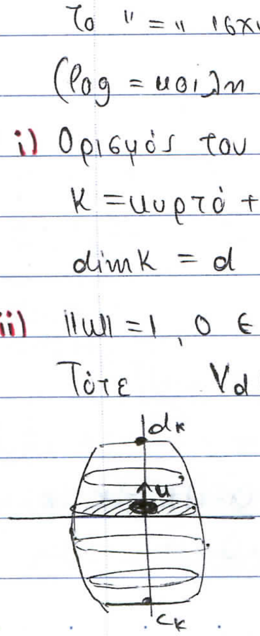
K = κυρτό + συμπαγές τότε έχει όγκο

$\dim K = d \iff V_d(K) > 0$.

ii) $\|u\| = 1$, $0 \in \varepsilon\sigma K$ $c_K = \min\{\langle x, u\rangle : x \in K\}$ $d_K = \max\{\langle x, u\rangle : x \in K\} = h_K(u)$

Τότε $V_d(K) = \int_{c_K}^{d_K} V_{d-1}(K \cap H(u,t))\,dt$, $V_{d-1}(K \cap H(u,t)) > 0$ $\forall t \in (c_K, d_K)$

$V_d(K + x_0) = V_d(K)$ και $V_d(\mu K) = \mu^d V_d(K)$, $\mu > 0$.



• ΘΕΩΡΗΜΑ

iii) $V_d : \langle \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^d), h \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$

συνεχής, εαν $K_n, K \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^d)$, $K_n \xrightarrow{n} K$ τότε $V_d(K_n) = V_d(K)$ (βλ. θεωρ.)

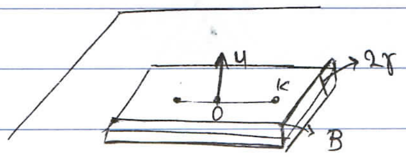
iv) στο iii) η $t \longrightarrow V_{d-1}(K \cap H(u,t))$ είναι συνεχης ως προς t.

(αν $t_n \to t$ τότε $\underbrace{V_{d-1}(K \cap H(u,t_n))}_{\text{κυρτά + φραγμένα άρα έχουν συγκλίνουσα υπακολουθία.}} \xrightarrow{n} V_{d-1}(K \cap H(u,t)))$

(Σημείωση: Δεν ισχυει αν τα K_n δεν είναι κυρτά)

Απόδειξη Θεωρήματος: $0 \in \text{ri}K$ $\varepsilon > 0$

1η περίπτωση: $V_d(K) = 0$ $\dim K \leq d-1 \Rightarrow \exists$ υπερεπίπεδο $K \subseteq H$



H / B = ορθογώνιο στο H : $K \subseteq \text{ri}B$

Τότε $\rho = d(\text{bd}K, \text{bd}B) > 0$

$0 < \gamma < \min\{\rho, \frac{\varepsilon}{2V_{d-1}(B)}\}$

$B(\gamma) = \{x + tu : x \in B, t \in [-\gamma, \gamma]\}$

$u \perp H$, $\|u\| = 1$ / $V_d(B)(= b \cdot v) = 2\gamma \cdot V_{d-1}(B) < \varepsilon$ (1)

$\gamma < \rho \Rightarrow K + \gamma S(0,1) \subseteq B(\gamma)$

$K_n \to K \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : K_n \subseteq K + \gamma S(0,1)$ για $n \geq n_0$

άρα $K_n \subseteq B(\gamma)$ για $n \geq n_0$, άρα $V_d(K_n) \leq V_d(B(\gamma)) \overset{(1)}{<} \varepsilon$

οπότε $\lim_n V_d(K_n) = 0 = V_d(K)$

2η περίπτωση: $\dim K = d$

$0 \in \text{εσ}K \Rightarrow \exists\ \overline{S(0,r)} \subseteq \text{εσ}K$

$\Rightarrow \rho = d(\text{bd}\overline{S(0,r)}, \text{bd}K) > 0$

Εάν $0 < \varepsilon' < \rho$ και $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{κυρτό + συμπαγές}}}{K \subseteq K' + \varepsilon' S(0,1)}$, τότε $\overline{S(0,r)} \subseteq K'$ (2)

$\lambda > 1 : 0 < \lambda^d(\lambda^d - 1)V_d(K) < \varepsilon$

$0 < \varepsilon' < \min\{\rho, (\lambda-1), r\}$.

$K_n \to K \Rightarrow n \geq n_0$ $\begin{cases} K_n \subseteq K + \varepsilon' S(0,1) \subseteq K + (\lambda-1)S(0,r) \subseteq K + (\lambda-1)K = \lambda K \ (K = \text{κυρτό}) \\ K \subseteq K_n + \varepsilon' S(0,1) \subseteq K_n + (\lambda-1)S(0,r) \subseteq K_n + (\lambda-1)K_n = \lambda K_n \end{cases}$

$(K \subseteq K_n + \varepsilon' S(0,1),\ \varepsilon' < \rho \underset{(2)}{\Rightarrow} S(0,r) \subseteq K_n)$

Επομένως $V_d(K) \le \lambda^d V_d(K_n)$ και $V_d(K_n) \le \lambda^d V_d(K)$ $\forall n \ge n_0$.

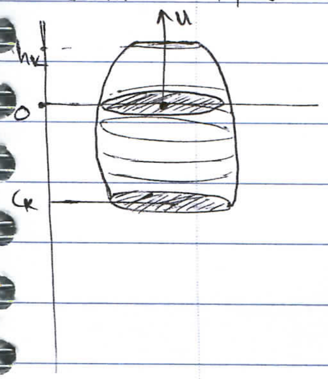
Τότε $V_d(K_n) - V_d(K) \le (\lambda^d - 1)V_d(K) \overset{\lambda>1}{<} \lambda^d(\lambda^d-1)V(K) < \varepsilon$

και $V_d(K) - V_d(K_n) \le (\lambda^d-1)V_d(K_n) \le (\lambda^d-1)\lambda^d V(K) < \varepsilon$.

δηλαδή $|V_d(K_n) - V_d(K)| < \varepsilon$ $\forall n \ge n_0$ $\Rightarrow V(K_n) \to V(K)$. ∎

• **Απόδειξη της Ανισότητας Brün - Minkowski:**

$\dim K = d$, $0 \in \varepsilon\sigma K$, $u \in \mathbb{R}^d$ με $\|u\| = 1$, $V_d(K) = 1$.



$V_d(K) = \int_{c_K}^{d_K} V_{d-1}(K \cap H(u,z))\,dz$ $\quad c_K = \min\{\langle x,u\rangle : x \in K\} < d_K = h_K(u)$

Ορίζω $K \cap H(u,z) = K_z$

$g(t) = \int_{c_K}^{t} V_{d-1}(K_z)\,dz$ συνεχής αφού ο όγκος είναι συνεχής

με $g(c_K) = 0$ και $g(d_K) = V_d(K) = 1$

$g'(t) = V_{d-1}(K_t) > 0$ $\forall z \in (c_K, d_K]$, (g = συνεχής στο $[c_K, d_K]$)

ΘΘΑΠ

Επομένως $\exists\, f : \underset{r}{[0,1]} \to \underset{t}{[c_K, d_K]}$ $\quad f'(r) = \dfrac{1}{V_{d-1}(K_{f(r)})}$, $r \in (0,1)$ (1)

$(g^{-1} =)$

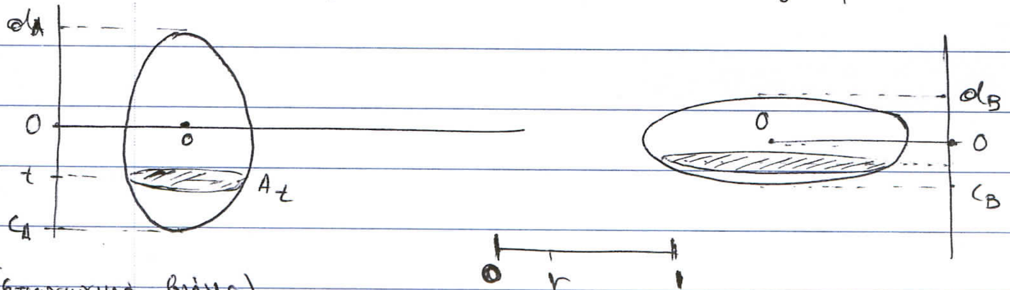
<u>1η περίπτωση:</u> $V(A) = V(B) = 1$, $(0 \in \varepsilon\sigma A, \varepsilon\sigma B)$ $\|u\| = 1$

f_A, f_B οι αντίστοιχες, δηλαδή $f_A'(r) = \dfrac{1}{V_{d-1}(K_{f_A(r)})}$ και $f_B'(r) = \dfrac{1}{V_{d-1}(K_{f_B(r)})}$ $r \in (0,1)$

Αρκεί ν.δ.ο. $V((1-\lambda)A + \lambda B) \ge 1$. Επαγωγή στο d:

Για $d = 1$ ισχύει ($[a, a+1]$, $[b, b+1]$ με "=")

Έστω ότι ισχύει για $d-1$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για d.



Πρέπει να τα συγκρίνω

(Επαγωγικό βήμα)

r: $V_{d-1}\left((1-\lambda)A_{f_A(r)} + \lambda B_{f_B(r)}\right) \ge \left[(1-\lambda)V_{d-1}^{1/d-1}(A_{f_A(r)}) + \lambda V_{d-1}^{1/d-1}(B_{f_B(r)})\right]^{d-1}$

$V_d(\underbrace{(1-\lambda)A + \lambda B}_{K_\lambda}) = \int_{c_{K_\lambda}}^{d_{K_\lambda}} V_{d-1}[((1-\lambda)A + \lambda B) \cap H(u,t)]\,dt$.

$f_\lambda(r) = (1-\lambda)f_A(r) + \lambda f_B(r)$ μετασχηματισμός

<u>Ισχύει:</u> (εύκολο) $(1-\lambda)A_{f_A(r)} + \lambda B_{f_B(r)} \subseteq [(1-\lambda)A + \lambda B]_{f_\lambda(r)}$

με το μετασχηματισμό έχουμε : $\int_0^1 V_{d-1}\left((1-\lambda)A+\lambda B\right)_{f_\lambda(r)} \cdot f'_\lambda(r)\,dr \geq$

$$\geq \int_0^1 V_{d-1}\left((1-\lambda)A_{f_A(r)}+\lambda B_{f_B(r)}\right) f'_\lambda(r)\,dr \overset{\text{(επαγωγική υπόθεση)}}{\geq}$$

$$\geq \int_0^1 \left[(1-\lambda)\, V_{d-1}^{1/d-1}(A_{f_A(r)})+\lambda\, V_{d-1}^{1/d-1}(B_{f_B(r)})\right]^{d-1} \left[(1-\lambda)\frac{1}{V_{d-1}(A_{f_A(r)})}+\lambda\frac{1}{V_{d-1}(B_{f_B(r)})}\right] dr \geq$$

$$\geq \int_0^1 1\, dr = 1$$ (ανισότητα στην αρχή)