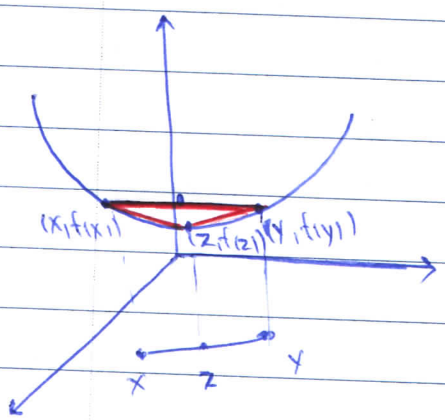
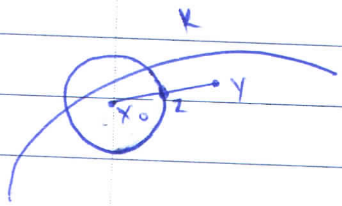
III) Κυρτές συναρτήσεις. Συναρτήσεις Στήριξης. Συναρτήσεις Στάθμης. Πολικό σύνολο. Σχέσεις των συναρτήσεων στήριξης και συναρτήσεων στάθμης.

1) Κυρτές συναρτήσεις: K κυρτό, $\dim K = n$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$

Ορισμός: Κυρτή συνάρτηση

Έστω $f: K \to \mathbb{R}$ η f είναι κυρτή $\Leftrightarrow$ $x, y \in K$, $\lambda \in [0,1] \Rightarrow$
$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$ $\Leftrightarrow$
($x_1, x_2, \dots, x_\nu \in K$ $\mu_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\nu} \mu_i = 1 \Rightarrow f(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_\nu x_\nu) \leq \mu_1 f(x_1) + \dots + \mu_\nu f(x_\nu)$
ανισότητα Jensen)





Άσκηση: Έστω $f: K \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in K$ είναι τοπικό ελάχιστο (και f κυρτή) τότε το x_0 είναι σημείο ολικού ελαχίστου.

Λύση: Θεωρούμε x_0 σημείο τοπικού ελαχίστου
$\Rightarrow \exists\, \rho > 0$ τ.ώ. αν $x \in K$ και $\|x - x_0\| \leq \rho$ τότε
$f(x_0) \leq f(x)$

Θεωρούμε $y \in K$ με $\|y - x_0\| > \rho$ τότε $[x_0, y] \subseteq K$ (κυρτό)
Παίρνουμε $z = x_0 + \rho \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$ και $\rho = \|z - x_0\|$
άρα $f(x_0) \leq f(z)$

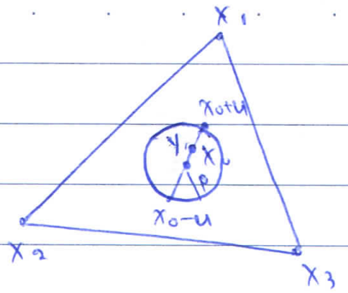
$$z = \Big(1 - \underbrace{\frac{\rho}{\|y - x_0\|}}_{>0}\Big) x_0 + \underbrace{\frac{\rho}{\|y - x_0\|}}_{>0} y$$

Τότε $f(x_0) \leq f(z) \leq \left(1 - \frac{\rho}{\|y - x_0\|}\right) f(x_0) + \frac{\rho}{\|y - x_0\|} f(y) \Rightarrow$

$$\frac{\rho}{\|y - x_0\|} f(x_0) \leq \frac{\rho}{\|y - x_0\|} f(y) \Rightarrow f(x_0) \leq f(y)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: $f: A \to \mathbb{R}$ A ανοιχτό + κυρτό και f κυρτή, τότε η f είναι συνεχής στο A.
(Lipschitz συνεχής σε κάθε B συμπαγές $\subseteq A$)

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in A$. Τότε $\exists$ουν $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in A$ affine ανεξάρτητα
ώστε $x_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ $\lambda_i > 0$ $\sum \lambda_i = 1$ δηλαδή $x_0 \in$ εσΔ όπου $\Delta = \mathrm{conv}(\{x_1, \dots, x_{n+1}\})$
(n-simplex)



$S(x_0,\rho) \subseteq \Delta \subseteq A$. Για τυχαίο $y' \in \Delta$ τότε $y' = \sum_{i=1}^{n+1} y_i x_i$

$\sum y_i = 1 \quad y_i \geq 0$

$f(y') \leq \sum_{i=1}^{n+1} y_i f(x_i) \leq c = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n+1})\}$

Θεωρούμε $\rho > 0$ ώστε $S(x_0,\rho) \subseteq \Delta$ και έστω $y \in S(x_0,\rho)$

με $S(x_0,\rho) = x_0 + S(0,\rho)$ τότε $y = x_0 + au$ για κάποιο

u με $\|u\| = \rho$ και $0 < a < 1$ $\left(a = \dfrac{\|y - x_0\|}{\rho}\right)$

$y = x_0 + au = x_0(1-a) + a(x_0+u) \quad 0<a<1 \quad x_0 \in A,\ x_0+u \in A$

άρα $f(y) \leq (1-a) f(x_0) + a f(x_0+u)$

$$f(y) - f(x_0) \leq a(\underset{\substack{\cap \\ \Delta}}{f(x_0+u)} - f(x_0)) \leq a(c - f(x_0))$$

επίσης $x_0 = \dfrac{(1+a)x_0}{1+a} = \dfrac{x_0 + a x_0}{1+a} = \left(\dfrac{1}{1+a} x_0 + \left(1 - \dfrac{1}{1+a}\right) x_0 = \right)$

$$\frac{1}{1+a}(x_0+au) + \frac{a x_0 - au}{1+a} = \frac{1}{1+a}\underset{\substack{\cap \\ A}}{y} + \frac{a}{1+a}\underset{\substack{\cap \\ A\cap\Delta}}{(x_0-u)}$$

έπεται $(1+a) f(x_0) \leq f(y) + a f(x_0-u) \Rightarrow$

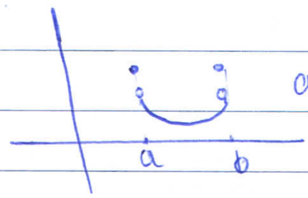
$$f(x_0) - f(y) \leq a(f(x_0-u) - f(x_0)) \leq a(c - f(x_0))$$

άρα $|f(y) - f(x_0)| \leq \|y - x_0\| \cdot \dfrac{c - f(x_0)}{\rho}$.

δηλαδή η f είναι Lipschitz τοπικά $(\rho = \rho_{x_0},\ c = c_{x_0})$

<u>Σημείωση</u>: Αν A όχι ανοιχτό το ζητούμενο δεν ισχύει

π.χ.



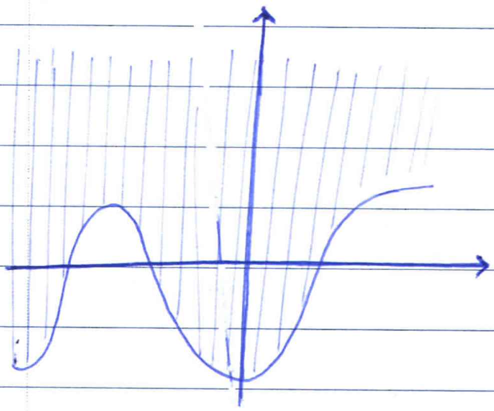
ασυνεχής

• Επιγράφημα Συνάρτησης

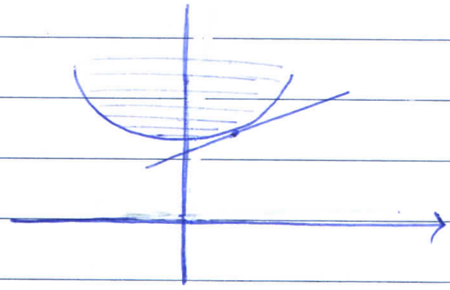
$h : B\ (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$epi(h) = \{(x,y) : x \in B,\ y \geq h(x)\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$

π.χ



Άσκηση: $f : K \to \mathbb{R}$ κυρτή $\Rightarrow$ $epi(f)$ κυρτό



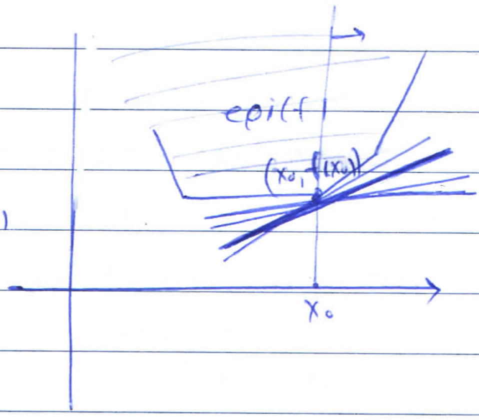
ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, A ανοιχτό και κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^n$ $(\neq \emptyset)$

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

① f κυρτή

② $\forall\, (x_0, f(x_0)) \in epi(f)$ $\exists\, v \in \mathbb{R}^n$ και $c_0 \in \mathbb{R}$ τ.ώ:
$f(x_0) = c_0 + \langle x_0, v\rangle$ $\quad y \geq c_0 + \langle x, v\rangle$ $\quad \forall\, x \in A,\ y \geq f(x)$

③ $x_0 \in A$ $\exists\, v \in \mathbb{R}^n$: $f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, v\rangle$ $\quad \hookrightarrow$ κλίση
$\forall\, x \in A$



Απόδειξη: ① ⇒ ②: f κυρτή $\Rightarrow$ $epi(f) =$ κυρτό, $(x_0, f(x_0)) \in bd(epi(f))$
και $bd(epi(f)) = bd(\overline{epi(f)})$ (από άσκηση) (A ανοιχτό $dim : n+1$)

Τότε $\exists\, (u, b) \neq (0_{\mathbb{R}^n}, 0)$ $(u, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ τ.ώ.

$\langle (x_0, f(x_0)), (u, b)\rangle = c$ $\Big\}$ $\leadsto$ υπερεπίπεδα στήριξης.

$\langle (x,y), (u,b)\rangle \leq c$ $\quad \forall\, (x,y) \in epi(f)$ άρα $\begin{cases} \langle x_0, u\rangle + b f(x_0) = c & ① \\ \langle x, u\rangle + b y \leq c \quad x \in A,\ y \geq f(x) & ② \end{cases}$

Ισχυρισμός: $b \neq 0$ Έστω ότι $b = 0$ τότε

① $\Rightarrow$ $\begin{cases} \langle x_0, u\rangle = c \\ \langle x, u\rangle \leq c \quad \forall\, x \in A \end{cases}$ και $x_0 \in A$ ανοιχτό άρα
και ② $\Rightarrow$ $\qquad\qquad \exists\, \rho > 0$ τ.ώ: $x_0 + \rho u \in A$

Έτσι $c \geq \langle x_0 + \rho u, u\rangle = c + \rho \|u\|^2 \Rightarrow u = 0$ δηλ. $(u, b) = (0_{\mathbb{R}^n}, 0)$

Άρα $b \neq 0$

Θεωρούμε x' = σταθερό στο A. Τότε $by' \leq c - \langle x', u\rangle \quad \forall\, y' \geq f(x')$

άρα $b<0$ (π.χ. $y' \to +\infty$)

οπότε
$$\begin{cases} \langle x_0, \frac{u}{-b}\rangle - f(x_0) = \frac{c}{-b} \\ \langle x, \frac{u}{-b}\rangle - y \leq \frac{c}{-b}, \quad x\in A,\ y \geq f(x) \end{cases}$$

Θέτοντας $v = \frac{u}{-b}$ $\quad a_0 = \frac{c}{b}$ έπεται
$$\begin{cases} \langle x_0, v\rangle + c_0 = f(x_0) \\ \langle x, v\rangle + c_0 \leq y \quad \forall\, y \geq f(x) \end{cases} \qquad c_0 = f(x_0)$$

(2) ⇒ (3): $y = f(x)$ $\quad f(x) \geq f(x) - \langle x_0, v\rangle + \langle x, v\rangle \Rightarrow$
$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, v\rangle \quad x\in A$$

(3) ⇒ (1): Θεωρούμε $x_1, x_2 \in A$, $\lambda\in(0,1)$, $z = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$

$(z, f(z)) \in \text{epi}(f) \Rightarrow \exists\, v = v_z : f(w) \geq f(z) + \langle w - z, v\rangle \quad \forall\, w\in A$

για $w = x_1, x_2$ έχουμε:
$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) \geq f(z) + \langle x_1 - z, v\rangle \\ f(x_2) \geq f(z) + \langle x_2 - z, v\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (1-\lambda) f(x_1) \geq (1-\lambda) f(z) + (1-\lambda)\langle x_1 - z, v\rangle \\ \lambda f(x_2) \geq \lambda f(z) + \lambda\langle x_2 - z, v\rangle \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$
$$(1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) \geq f(z) + \langle (1-\lambda)x_1 + (\lambda - 1)z + \lambda x_2 - \lambda z, v\rangle \Rightarrow$$
$$(1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) \geq f(z) + \langle z - z, v\rangle = f(z) + \langle 0, v\rangle = f(z)$$

• **ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ**: $f: I \to \mathbb{R}$, I = διάστημα του $\mathbb{R}$ και $x_0 \in I$ $\quad g_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- f αύξουσα $\Rightarrow g_{x_0} \geq 0 \quad \forall\, x_0 \in I$
- f κυρτή $\Rightarrow g_{x_0}$ αύξουσα $\forall\, x_0\in I$

1) $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ $\quad A$ = κυρτό + ανοιχτό, $x_0\in A$, (f κυρτή)

$\partial f(x_0) = \{v\in\mathbb{R}^n : f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, v\rangle \ \forall\, x\in A\} \neq \emptyset$ (κλίσεις ευθειών εφαπτόμενων στο x_0)

υποδιαφορικό της κυρτής f στο x_0

Π.χ.: $f(x) = |x|$, $x\in\mathbb{R}$ $\quad v\in\partial f(x_0) \Leftrightarrow |x| \geq |x_0| + \langle x - x_0, v\rangle$

για $x_0 = 0$: $\quad |x| \geq \langle x, v\rangle = xv \Rightarrow |v| \leq 1$

έπεται ότι $\partial f(0) = [-1, 1] = [f'_-(0), f'_+(0)]$

2) I ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$

$f: I \to \mathbb{R}$ $x_0 \in I$ τότε $\exists f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ και

$\partial f(x_0) = [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$

Εάν $\exists f'(x_0) \Rightarrow \partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.

Το $D = \{x_0 \in I : \exists f'(x_0)\} = I \setminus J$ όπου J αριθμήσιμο

και η $f': D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και αύξουσα.

3) $f: A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ $n \geq 2$ A = ανοικτό f: κυρτή και $x_0 \in A$

αν $\exists$ ουν $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ τότε $\exists$ το $df(x_0)$ και $\partial f(x_0) = \nabla f(x_0)$

Το $D = \{x_0 \in A : \exists\, df(x_0)\}$ είναι πυκνό στο A, $\lambda(A \setminus D) = 0$

(και οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς.

4) x_0 ολικό ελάχιστο $\Leftrightarrow 0 \in \partial f(x_0)$

(R. T. Rockafellar
Convex Analysis)

Ειδική κατηγορία κυρτών συναρτήσεων:

ΘΕΤΙΚΑ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΚΥΡΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θετικά ομογενής $\Leftrightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\lambda \geq 0$ $(f(0) = 0)$

Άσκηση: Έστω f θ.ομ. τότε f κυρτή $\Leftrightarrow f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

Πόρισμα: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θ.ομ + κυρτή

Τότε $\forall v_0 \in \mathbb{R}^n$ $\exists\, a_0 \in \mathbb{R}^n$: $f(v_0) = \langle a_0, v_0 \rangle$, $f(v) \geq \langle a_0, v \rangle$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

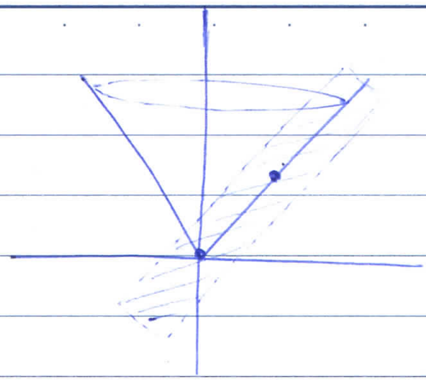
Απόδειξη: $(v_0, f(v_0)) \in \text{epi}(f) \overset{\Theta}{\Longrightarrow} \exists\, v_0 \in \mathbb{R}^n, c_0 \in \mathbb{R}$ ώστε

$f(v_0) = c_0 + \langle a_0, v_0 \rangle$ και $f(v) \geq c_0 + \langle a_0, v \rangle$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

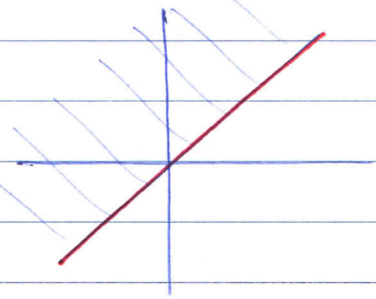
άρα $c_0 + \langle a_0, \lambda v_0 \rangle \leq f(\lambda v_0) = \lambda f(v_0) = \lambda c_0 + \langle a_0, \lambda v_0 \rangle \Rightarrow$

$(1-\lambda) c_0 \leq 0$ $\forall \lambda \geq 0$ άρα $c_0 = 0$

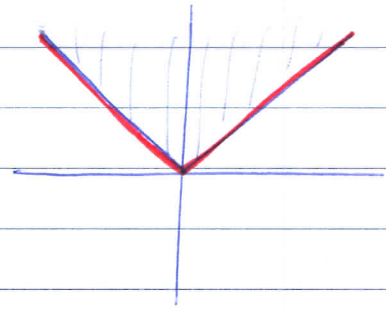
$\left(\begin{array}{l} \text{για } \lambda \to 0^+ \text{ είναι } c_0 \leq 0 \\ \text{για } \lambda > 1 \text{ είναι } c_0 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c_0 = 0 \Big)$



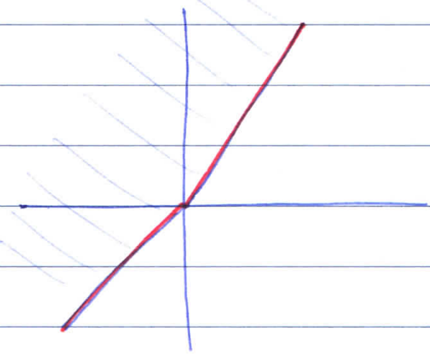
π.χ. $f_1(x) = x$



$f_2(x) = |x|$

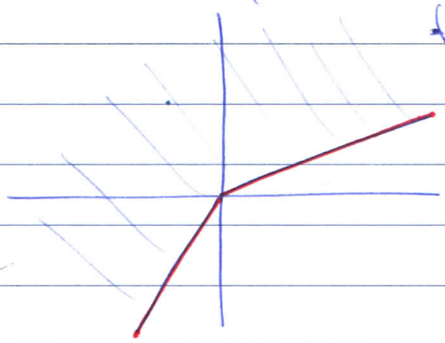


$$f_3(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$$



Οι f_1, f_2, f_3 έχουν όλες τους κυρτό επιγράφημα

f_4



Η f_4 δεν έχει κυρτό επιγράφημα.

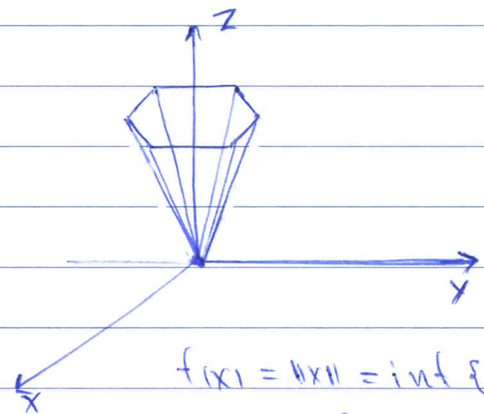
NORMS

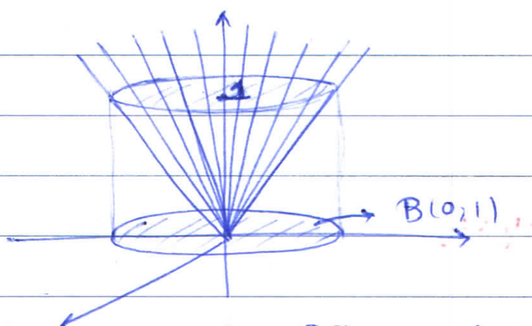
- $f(x) = \|x\|$ $x \in \mathbb{R}^n$ $(f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$

i) $f(x) \geq 0$, $f(x) = 0 \iff x = 0$

ii) $f(\lambda x) = |\lambda| \cdot f(x)$ (θ.ομ) άρα $f(x) = f(-x)$ (άρτια)

iii) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ άρα κυρτή





$$f(x) = \|x\| = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B(0,1)\}$$
$$= \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in B(0,1)\}$$
$$= \inf\{\lambda > 0 : \|x\| \leq \lambda\}.$$

$B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ κυρτό + κλειστό και συμμετρικό, δηλαδή $+B(0,1) = -B(0,1)$, $0 \in εσB(0,1)$ και φραγμένο

Δηλαδή $\|x\| = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$ K συμπαγές, συμμετρικό και $0 \in εσK$.

• ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΑΘΜΗΣ (Συναρτησοειδές Minkowski)

$K =$ κυρτό + κλειστό $\subseteq \mathbb{R}^n \neq \emptyset$

Ορισμός: $g_K(x) = \inf\{\lambda>0 : x \in \lambda K\} \geq 0$

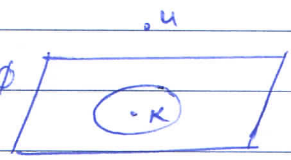
Θα πρέπει για να έχουμε το g_K νόρμα να ισχύουν τα εξής:

- $g_K(0)=0$, δηλαδή $0 \in \lambda K$ $\forall \lambda>0$, άρα $0 = \lambda a$, $a \in K$ $\forall \lambda >0$
  οπότε $\underline{a = 0 \in K}$
- $g_K(x) \in \mathbb{R}$, δηλ $\{\lambda>0 : x \in \lambda K\} \neq \emptyset$.

Αν $\dim K \leq n-1$, $\exists\, u \notin \mathrm{aff} K = \mathrm{span} K$, τότε $u \notin \lambda K \subseteq \mathrm{span} K$ $(0 \in K)$ $\forall \lambda>0$

άρα $g_K(u) = \inf\{\lambda>0 : u \in \lambda K\} = +\infty$

Συνεπώς πρέπει $\underline{\dim K = n}$ και τότε $\text{εσ} K \neq \emptyset$



– Έστω $0 \notin \text{εσ}K$, άρα $0 \in \mathrm{bd} K$ (Σχήμα)

$x_0 \in \text{εσ}K \Rightarrow -x_0 \notin K$

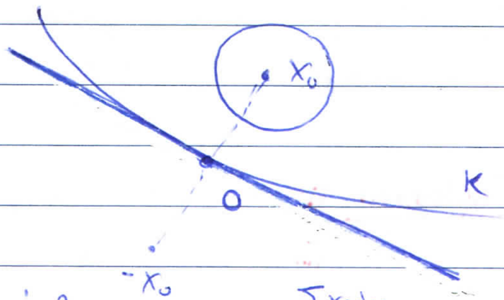
άρα $\exists\, u \neq 0 : \langle u, -x_0\rangle > 0 \geq \langle u, x\rangle$ $\forall x \in K$

$\Leftrightarrow -\langle u, x_0\rangle > 0 \geq \langle u, x\rangle$ $\forall x \in K$

Έστω ότι $\exists\, \lambda>0 : -x_0 = \lambda y_0$, $\lambda>0$, $y_0 \in K$

τότε $\langle u, -x_0\rangle > 0 \geq \langle u, -\frac{x_0}{\lambda}\rangle$ άτοπο αφού $\lambda>0$

άρα $g_K(x_0) = +\infty \Rightarrow 0 \in \text{εσ}K$.



Σχήμα

__Τότε__: $0 \in \text{εσ}K \Rightarrow \exists\, \hat{S}(0,r) \subseteq K$ και $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\frac{xr}{\|x\|} \in \hat{S}(0,r) \subseteq K$

Αν $\lambda = \frac{\|x\|}{r} \Rightarrow x \in \lambda K$, άρα $g_K(x) \in \mathbb{R}$.

__Παρατήρηση:__ $x \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda_x = \{\lambda>0 : x \in \lambda K\} \neq \emptyset$ $(0 \in \text{εσ}K)$

Έστω $(\lambda>0$ και $\mu>\lambda)$ $\lambda \in \Lambda_x \Rightarrow x \in \lambda K \Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in K$

$0 < \frac{\lambda}{\mu} < 1$ $\quad \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\underset{\text{εσ}K}{\underset{\cap}{0}} + \frac{\lambda}{\mu}\cdot\underset{K}{\underset{\cap}{\frac{x}{\lambda}}} \in K$ (=κυρτό) $\Rightarrow \frac{x}{\mu} \in K \Rightarrow x \in \mu K \Rightarrow \mu \in \Lambda_x$

Άρα το Λ_x είναι διάστημα της μορφής: $[a,+\infty)$ ή $(a,+\infty)$ $a \geq 0$

– $g_K(x) > 0 \Rightarrow \exists$ουν $\lambda_\nu \in \Lambda_x$ με $\lambda_\nu \to g_K(x) > 0$ άρα $\frac{x}{\lambda_\nu} \to \frac{x}{g_K(x)}$

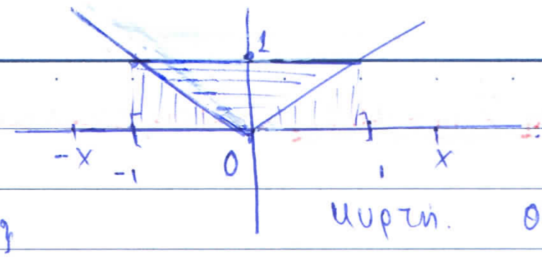
$\lambda_\nu \in \Lambda_x \Rightarrow x \in \lambda_\nu K \Rightarrow \frac{x}{\lambda_\nu} \in K$ άρα $\frac{x}{g_K(x)} \in \bar{K} = K$ (K κλειστό)

__Επομένως__ $\boxed{g_K(x)>0 \Rightarrow x \in g_K(x)\cdot K}$

Παραδείγματα: **1)** $K = [-1,+1] \subseteq \mathbb{R}$

$g_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in [-\lambda, +\lambda]\} = |x|$

$(x \in \mathbb{R})$ και $K = \{x \in \mathbb{R} : g_K(x) \leq 1\}$



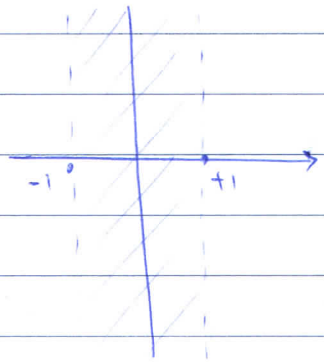
κυρτή. Θ.ομ + νόρμα

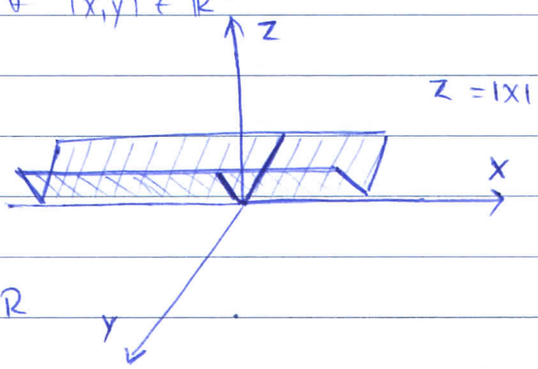
2) $K = [-1,+1] \times \mathbb{R}$ (όχι φραγμένο άρα όχι νόρμα)

$g_K((x,y)) = \inf\{\lambda > 0 : (x,y) \in [-\lambda,+\lambda] \times \mathbb{R}\} = |x|$

$K = \{(x,y) : g_K(x,y) \leq 1\}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$





$g_K((x,y)) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $y \in \mathbb{R}$

άρα όχι νόρμα

! Πρόταση: (i) $g_K(x) \geq 0$ και η g_K είναι θετ. ομ.

(ii) $K = \{x \in \mathbb{R}^n : g_K(x) \leq 1\}$

(iii) K φραγμένο $\Leftrightarrow g_K^{-1}(0) = 0$ (ή $g_K(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$)

(iv) Η g_K είναι θετικά ομογενής και κυρτή

Απόδειξη: (i) $g_K(x) \geq 0$. $g_K(0) = 0$ (διότι $0 \in \lambda K \ \forall \lambda > 0$)

$\mu > 0$ $g_K(\mu x) = \inf\{\lambda > 0 : \mu x \in \lambda K\} = \inf\{\mu \cdot (\frac{\lambda}{\mu}) > 0 : x \in \frac{\lambda}{\mu} K\} =$

$\mu \cdot \inf\{\rho > 0 : x \in \rho K\} = \mu \cdot g_K(x)$ και άρα είναι θετ. ομογενής.

(ii) Έστω $x \in K = 1 \cdot K$ τότε $g_K(x) \leq 1$ αφού $1 \in \Lambda_x$ και άρα έχουμε

$K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : g_K(x) \leq 1\}$ ① (x τυχόν στο K)

Τώρα αν $g_K(x) = 0 \Rightarrow x \in \lambda K \ \forall \lambda > 0$ άρα και για $\lambda = 1$ δηλ $x \in K$

και αν $g_K(x) > 0 \Rightarrow x \in g_K(x) K \subseteq K$ καθώς K κυρτό, δηλαδή

$\{x : g_K(x) \leq 1\} \subseteq K$ ②

Από τις ① και ② έχουμε ισότητα

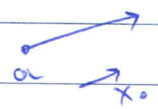
(iii) K φραγμένος και $x_0 \in \mathbb{R}^n$: $g_K(x_0) = 0 = |\lambda| g_K(\lambda x_0) = \lambda g_K(x_0) = 0$

$\forall \lambda > 0$, άρα $g_K(\lambda x_0) < 1$ και από (ii) $\lambda x_0 \in K \ \forall \lambda > 0$.

Όμως K φραγμένο $\Rightarrow x_0 = 0$.

Αντίστροφα, αν K όχι φραγμένο, τότε (Άσκηση 1) $\exists\, x_0 \neq 0$ ώστε $\lambda x_0 \in K$ $\forall \lambda>0$ και από (iii) $\lambda x_0 \in K$ $\forall \lambda>0 \Rightarrow g_K(\lambda x_0) \leq 1$ $\forall \lambda>0 \overset{(i)}{\Rightarrow}$ $g_K(x_0) \leq \frac{1}{\lambda}$ $\forall \lambda>0 \overset{\lambda\to+\infty}{\Rightarrow} g_K(x_0) \leq 0$, άρα $g_K(x_0)=0$

ΑΣΚΗΣΗ: $K=$ κυρτό, όχι φραγμένο, τότε $\forall a\in K$ $\exists\, x_0 \neq 0$ τ.ώ. η $\{a+\lambda x_0,\ \lambda>0\} \subseteq K$ (Θεώρημα Webster)



(iv) g_K θ. ομογενής. Αρκεί ν.δ.ο $g_K(x+y) \leq g_K(x)+g_K(y)$ $x,y\in\mathbb{R}^n$

αν $g_K(x)=g_K(y)=0 \Rightarrow x,y \in \lambda K$ $\forall \lambda>0$

$(\forall \lambda')$ $x+y \in \lambda K+\lambda K = 2\lambda K = \lambda' K \Rightarrow g_K(x+y)=0 = g_K(x)+g_K(y)$

αν $g_K(x)$ και $\mu > g_K(y)$ τυχόν τότε από παρατήρηση $x\in g_K(x)K$ $\Rightarrow y \in \mu K$ άρα $x+y \in (g_K(x)+\mu)K$

$g_K(x+y) \leq g_K(x)+\mu$ $\quad \mu > g_K(y)$

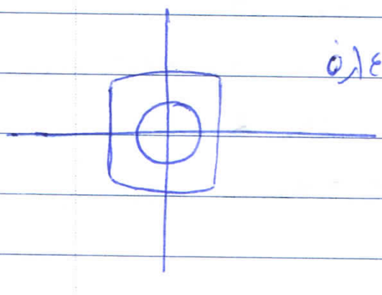
άρα $g_K(x+y) \leq g_K(x)+g_K(y)$

Πόρισμα: K, L κυρτά + κλειστά και $0 \in \varepsilon\sigma K, \varepsilon\sigma L$ τότε:

$K=L \Leftrightarrow g_K = g_L$ ("$\Leftarrow$": λόγω του (ii))

Πρόταση: $K=$ κυρτό + κλειστό + ($0\in \varepsilon\sigma K$) + φραγμένο ($g_K(x_0)=0 \Rightarrow x_0=0$) + $K=-K$. Τότε το g_K = νόρμα με μοναδιαία σφαίρα (K συμμετρικό) $K=\{x : g_K(x)\leq 1\}$

(υπόδειξη: $g_K(x) = g_K(-x)$)



όλες οι νόρμες ισοδύναμες με την Ευκλείδεια

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Έστω $f \geq 0$ θ.ομ + κυρτή $(f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$

$B = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 1\}$ κυρτό + κλειστό + $(0 \in \epsilon\sigma B)$

Τότε $g_B = f$

Συμπέρασμα: Για $f \geq 0$ θ.ομ + κυρτή αντιστοιχεί μοναδικό B για το οποίο η $f = g_B$

Απόδειξη: B κυρτό $(f = \text{κυρτή})$

$B = f^{-1}((-\infty, 1])$ $\quad f$ κυρτή $\Rightarrow f$ συνεχής

άρα αντιστρέφει κλειστά σε κλειστά οπότε B κλειστό

$0 \in \underbrace{f^{-1}(\underbrace{(-\infty, 1)}_{\text{ανοιχτό}})}_{\subseteq B}$ αφού $f(0) = 0$ στις θ.ομ.

Άρα $0 \in \epsilon\sigma B$. Ορίζεται η g_B

Παίρνουμε $x \in \mathbb{R}^n$. Έστω $g_B(x) > 0$ τότε $g_B\left(\frac{x}{g_B(x)}\right) = 1 \Rightarrow$

$\frac{x}{g_B(x)} \in B \Rightarrow f\left(\frac{x}{g_B(x)}\right) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq g_B(x)$

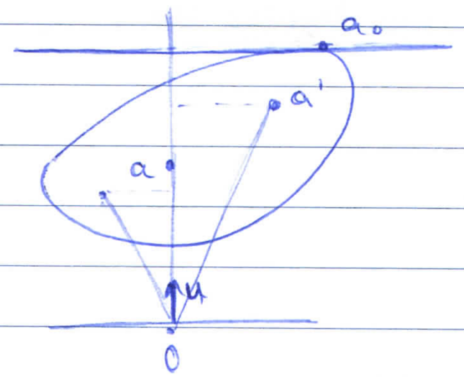
αν $g_B(x) = 0 \Rightarrow \lambda x \in B \ \forall \lambda > 0 \Rightarrow 0 \leq \lambda f(x) \leq 1 \ \forall \lambda > 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Άρα $\forall x \in \mathbb{R}^n \ f \leq g_B$

Αντίστοιχα προκύπτει ότι $g_B \leq f$. Τελικά $g_B = f$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΗΡΙΞΗΣ

K = κυρτό + κλειστό + φραγμένο $(\neq \emptyset, \subseteq \mathbb{R}^n)$



$h_K(u) = \max\{\langle a, u\rangle : a \in K\} \in \mathbb{R}$

υπάρχει αφού η $\langle \cdot, u\rangle : K \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, $(K = \text{συμπαγές})$ άρα υπάρχει $a_u \in K$ τέτοιο ώστε $h_K(u) = \langle a_u, u\rangle$

Τότε $\forall u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ το $H(u, \langle a_u, u\rangle)$ είναι υπερεπίπεδο στήριξης του K

διότι $\forall a \in K \ \langle a, u\rangle \leq h_K(u)$ και

$\langle a_u, u\rangle = h_K(u)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: K = κυρτό

(i) h_K θετ. ομ., $h_K(0)=0$ και h_K κυρτή (supremum)

(ii) $K = \{a\in\mathbb{R}^n : \langle a,u\rangle \le h_K(u)\ \forall u\in\mathbb{R}^n\}$

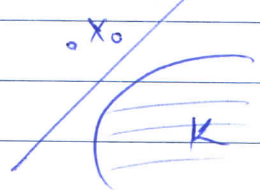
(iii) $h_K \geq 0 \iff 0\in K$

Απόδειξη: (i) (άσκηση)

(ii) $\Gamma = \{a\in\mathbb{R}^n : \langle a,u\rangle \le h_K(u)(=\max\{\langle a',u\rangle : a'\in K\})\ \forall u\in\mathbb{R}^n\}$

• Έστω $a\in K \Rightarrow \langle a,u\rangle\le h_K(u) \Rightarrow a\in\Gamma$ δηλαδή $\Gamma\supseteq K$ ①

• Έστω $x_0\notin K$, τότε $\exists\, v\neq 0$ και $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ τ.ω.:



$\langle x_0,v\rangle \geq \gamma > \delta > \langle a,v\rangle\ \forall a\in K$

$\Rightarrow \langle x_0,v\rangle > \langle a,v\rangle\ \forall a\in K$

$\Rightarrow \langle x_0,v\rangle > \max\{\langle a,v\rangle : a\in K\} = h_K(v)$

$\Rightarrow x_0\notin\Gamma$ δηλαδή $x_0\notin K \Rightarrow x_0\notin\Gamma \iff x\in\Gamma\Rightarrow x\in K$

άρα $\Gamma\subseteq K$ ②

Από τους εγκλεισμούς ① και ② έχουμε ισότητα δηλαδή $\Gamma=K$.

(iii) Προφανές από το (ii) της πρότασης

ΠΟΡΙΣΜΑ 1: $K=L \iff h_K = h_L$ (προκύπτει από το (ii) της πρότασης)

ΠΡΟΤΑΣΗ': K κυρτό + συμπαγές + ($0\in$ εσK) και $K=-K$

τότε η h_K είναι νόρμα με $K' = \{u : h_K(u)\le 1\}$ μοναδιαία σφαίρα.

Συν. Στάθμης

K κυρτό + κλειστό + $0 \in \varepsilon\sigma K$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$

συν στάθμης $g_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$, $x \in \mathbb{R}^n$

① $g_K \geq 0$ θετ. ομογ. κυρτή

$K = \{x \in \mathbb{R}^n : g_K(x) \leq 1\}$

② K = φραγμένο $K = -K$

$g_K = \|\cdot\|_K$ ορίζει νόρμα στον $\mathbb{R}^n$

$S_{\|\cdot\|_K} = \{x : g_K(x) \leq 1\} = K$

③ $f \geq 0$ θετ. ορ. κυρτή $\Rightarrow$

f συν. στάθμης

$K = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 1\}$

Συνάρτηση Στήριξης

K κυρτό + κλειστό + φραγμένο $K \subseteq \mathbb{R}^n$

συν. στήριξης $h_K(x) = \max\{\langle a, u\rangle : a \in K\}$, $u \in \mathbb{R}^n$

① h_K θετ. ορισμένη, κυρτή

$0 \in K \iff h_K \geq 0$

$K = \{a \in \mathbb{R}^n : \langle a, u\rangle \leq h_K(u) \ \forall u \in \mathbb{R}^n\}$

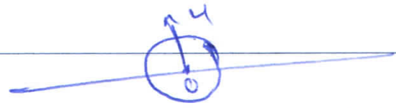
②

② **Πρόταση:** K: κυρτό + συμπαγές + $0 \in \varepsilon\sigma K$, $K = -K$. Τότε η h_K ορίζει νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ με μοναδιαία σφαίρα $K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : h_K(y) \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, a\rangle \leq 1 \ \forall a \in K\}$

Απόδειξη: $h_K \geq 0$ $(0 \in K)$ $h_K(0) = 0$

(i) $h_K(u) = 0$, $\langle a, u\rangle = 0$ $\forall a \in K$

$0 \in \varepsilon\sigma K$ $\exists \rho > 0 : \rho u \in K$



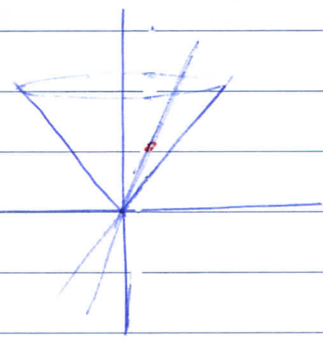
$0 = \langle \rho u, u\rangle = \rho \cdot \|u\|^2 \Rightarrow u = 0$

(ii) $h_K(\lambda u) = \lambda h_K(u)$ $\lambda \geq 0$

$h_K(-u) = h_K(u)$ $K = -K$ συμμετρικό.

$h_K(\mu u) = \|\mu\| \cdot h_K(u)$ $\mu \in \mathbb{R}$

(iii) $h_K(u+v) \leq h_K(u) + h_K(v)$



③ **ΘΕΩΡΗΜΑ 2:** $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θ. ομ. και κυρτή

$L = \{a \in \mathbb{R}^n : \langle a, u\rangle \leq g(u) \ \forall u \in \mathbb{R}^n\}$

(θ.δ.ο συνάρτηση στήριξης του L είναι η g)

Τότε $L \neq \emptyset$ κυρτό + κλειστό + φραγμένο και έχει συνάρτηση στήριξης $h_L = g$.

Απόδειξη: Έστω $(u_0, g(u_0)) \in epi(g)$. Τότε $\exists a_0 \in \mathbb{R}^n$ τ.ώ. $\langle a_0, u_0\rangle = g(u_0)$ και $\langle a_0, u\rangle \leq g(u)$ $\forall u \in \mathbb{R}^n$ (*) Τότε $a_0 \in L$

Συν. Στάθμης

K κυρτό + κλειστό + $0 \in \varepsilon\sigma K$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$

συν. στάθμης $g_K(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}, x \in \mathbb{R}^n$

① $g_K \geq 0$ θετ. ομογ. κυρτή

$K = \{x \in \mathbb{R}^n : g_K(x) \leq 1\}$

② K = φραγμένο $K = -K$

$g_K = \|\cdot\|_K$ ορίζει νόρμα στο $\mathbb{R}^n$

$S_{\|\cdot\|_K} = \{x : g_K(x) \leq 1\} = K$

③ $f \geq 0$ θετ. ομ. κυρτή $=1$

f συν. στάθμης

$K = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 1\}$

Συνάρτηση Στήριξης

K κυρτό + κλειστό + φραγμένο $K \subseteq \mathbb{R}^n$

συν. στήριξης $h_K(x) = \max\{\langle a, u\rangle : a \in K\}$, $u \in \mathbb{R}^n$

① h_K θετ. ομογενής, κυρτή

$0 \in K \iff h_K \geq 0$

$K = \{a \in \mathbb{R}^n : \langle a, u\rangle \leq h_K(u)\ \forall u \in \mathbb{R}^n\}$

②

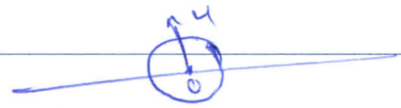
---

① **Πρόταση:** K: κυρτό + συμπαγές + $0 \in \varepsilon\sigma K$ $K = -K$. Τότε η h_K ορίζει νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ με μοναδιαία σφαίρα $K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : h_K(y) \leq 1\} =$ $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, a\rangle \leq 1\ \forall a \in K\}$

Απόδειξη: $h_K \geq 0$ $(0 \in K)$ $h_K(0) = 0$

(i) $h_K(u) = 0$, $\langle a, u\rangle = 0\ \forall a \in K$

$0 \in \varepsilon\sigma K$ $\exists \rho > 0 : \rho u \in K$



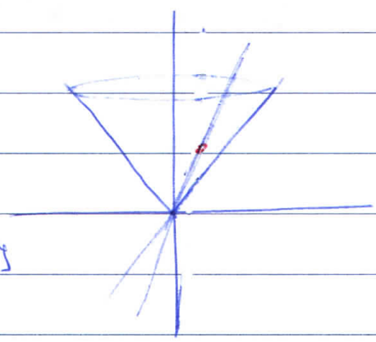
$0 = \langle \rho u, u\rangle = \rho \cdot \|u\|^2 \Rightarrow u = 0$

(ii) $h_K(\lambda u) = \lambda h_K(u)$ $\lambda \geq 0$

$h_K(-u) = h_K(u)$ $K = -K$ συμμετρικό.

$h_K(\mu u) = \|\mu\| \cdot h_K(u)$ $\mu \in \mathbb{R}$

(iii) $h_K(u+v) \leq h_K(u) + h_K(v)$



③ **ΘΕΩΡΗΜΑ 2:** $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θ. ομ. και κυρτή

$L = \{a \in \mathbb{R}^n : \langle a, u\rangle \leq g(u)\ \forall u \in \mathbb{R}^n\}$

(Ο.δ.ο συνάρτηση στήριξης του L είναι η g)

Τότε $L \neq \emptyset$ κυρτό + κλειστό + φραγμένο και έχει συνάρτηση στήριξης $h_L = g$.

Απόδειξη: Έστω $(u_0, g(u_0)) \in \mathrm{epi}(g)$. Τότε $\exists\ a_0 \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $\langle a_0, u_0\rangle = g(u_0)$

και $\langle a_0, u\rangle \leq g(u)\ \forall u \in \mathbb{R}^n$ ⊛ Τότε $a_0 \in L$

- $L \neq \emptyset$ αφού $a_0 \in L$
- L κυρτό ($\langle \cdot, u \rangle$: γραμμική συνάρτηση)
- L κλειστό ($\langle \cdot, u \rangle$ = συνεχής).
- L φραγμένο. $M = \max\{|g(e_i)|, |g(-e_i)|\ i=1,\dots,n\}$ $\{e_i\}$ βάση του $\mathbb{R}^n$

$a \in L$ τότε $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ $a_i = \langle a, e_i \rangle$.

$$\left.\begin{array}{l} a_i = \underbrace{\langle a, e_i \rangle}_{\in L} \le g(e_i) \le M \\ -a_i = \langle a, -e_i \rangle \le g(-e_i) \le M \end{array}\right\} \Rightarrow |a_i| \le M \quad \forall i=1,\dots,n$$

και άρα $\|a\| \le M \cdot n$.

Έπεται ότι $L \subseteq \hat{B}(0, Mn)$ άρα φραγμένο.

Έστω $u_0 \in \mathbb{R}^n$ τότε από ⊛ $\exists\, a_0 \in L$: $\langle a_0, u_0 \rangle = g(u_0) \le h_L(u_0)$ ($= \max$)

Άρα $g \le h_L$

$\exists\, x_0 \in L$: $h_L(u_0) = \langle x_0, u_0 \rangle \le g(u_0)$ άρα $h_L \le g$

Τελικά $g = h_L$.

! Σύνοψη – Ερωτήματα

K = κυρτό + κλειστό + φραγμένο (και $0 \in \operatorname{int} K$). Τότε

$g_K, h_K \ge 0$ αφού $0 \in K$ θετικά ομογενείς και κυρτές.

1) $K = \{a \in \mathbb{R}^n : g_K(a) \le 1\}$ και η g_K είναι συνάρτηση στάθμης

$K = \{a \in \mathbb{R}^n : \langle a, u \rangle \le h_K(u)\ \forall u \in \mathbb{R}^n\}$ και η h_K είναι συνάρτηση στήριξης

2) (Θ.3) $K^\circ = \{u \in \mathbb{R}^n : h_K(u) \le 1\} = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, a \rangle \le 1\ \forall a \in K\}$

Τότε $h_K = g_{K^\circ}$ συνάρτηση στάθμης

$L = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \le g_K(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$ τότε $g_K = h_L$. συνάρτηση στήριξης.

	Συναρ. Στάθμης	Συν. Στήριξης
K	g_K	h_K
K°	h_K	g_K ??
K^∞	g_K (;)	h_K (;)

• Συνάρτηση στήριξης της B_p, $1 \leq p < +\infty$ σφαίρας.

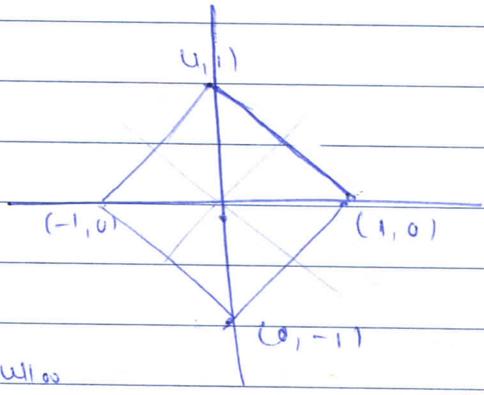
$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $B_1 = \{x : \|x\|_1 \leq 1\}$, $g_{B_1} = \|\cdot\|_1$

$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i=1,\dots,n\}$ $B_\infty = \{x : \|x\|_\infty \leq 1\}$ $g_{B_\infty} = \|\cdot\|_\infty$

$1 < p < +\infty$ $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ $B_p = \{x : \|x\|_p \leq 1\}$ $g_{B_p} = \|\cdot\|_p$

• B_1: $h_K(u) = \max\{\langle x,u\rangle : x \in B_1\}$



$\|x\|_1$ $\langle x,u\rangle = \sum x_i u_i \leq \sum |x_i||u_i| \leq$

$\max\{|u_i| : i=1,\dots,n\} \cdot \|x\|_1 \leq \|u\|_\infty$

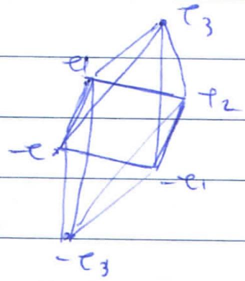
$h_K(u) \leq \|u\|_\infty$

$u \in \mathbb{R}^n$ $x_0 \in B_1$

$x_0 = (1,0,\dots,0)$ $h_K(u) \geq u_1 = \|u\|_\infty$

$(u_1 = \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\} > 0)$

$h_{B_1} = \|\cdot\|_\infty = g_{B_\infty}$



• B_∞: $h_K(u) = \max\{\langle x,u\rangle : x \in B_\infty\}$

$\|x\|_\infty \leq 1$ $\langle x,u\rangle = \sum x_i u_i \leq \sum |x_i||u_i| \leq$

$\leq \max\{|x_i| \; i=1\dots n\} \cdot \|u\|_1 \leq \|u\|_1$

$h_{B_\infty}(u) \leq \|u\|_\infty$

$h_{B_\infty} = \|\cdot\|_1 = g_{B_1}$

• B_p: $1<p<+\infty$ $\|x\|_p \leq 1$ $\langle x,u\rangle \leq \sum_{i=1}^n |x_i||u_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^q\right)^{1/q}$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$h_{B_p}(u) \leq \|u\|_q = g_{B_q}$

τελικά $h_{B_p} = g_{B_q}$.

	Συν στάθμης	Συν στήριξης
B_1	$\|\cdot\|_1$	$\|\cdot\|_\infty$
B_∞	$\|\cdot\|_\infty$	$\|\cdot\|_1$
B_p	$\|\cdot\|_p$	$\|\cdot\|_q$
B_q	$\|\cdot\|_q$	$\|\cdot\|_p$

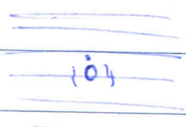
$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $1<p<+\infty$.

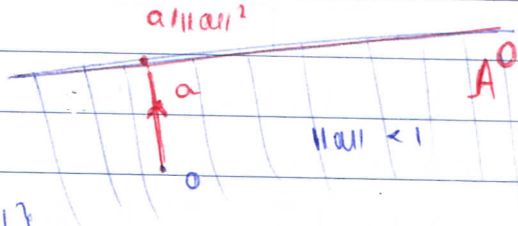
• Πολικό σύνολο, Διπολικό Θεώρημα, Σχέση μεταξύ $g_K, h_K, g_{K^\circ}, h_{K^\circ}$

$A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε $A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a\rangle \leq 1 \ \forall a \in A\}$.

$0 \in A^\circ$, A° = κυρτό + κλειστό.

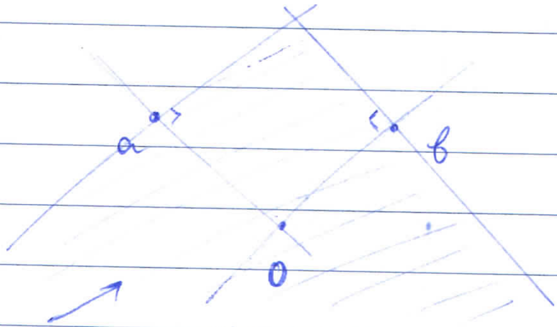
Π.χ.: • $A = \{0\}$ $\quad A^\circ = \mathbb{R}^n$

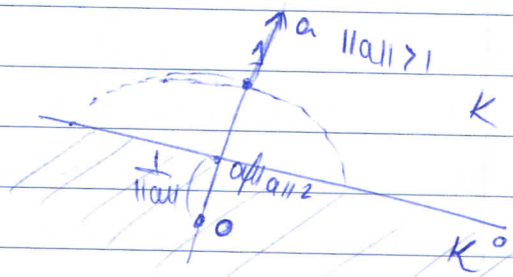




• $A = \{a\}$ $\quad a \neq 0$

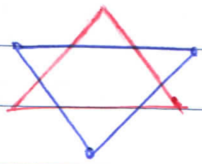
$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a\rangle \leq 1\}$

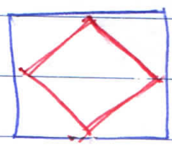




$A = \{a, b\}$

Δηλαδή $A^\circ = \bigcap_{a \in A} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a\rangle \leq 1\}$.





(Αν $A = \mathbb{R}^n$ τότε $A^\circ = \{0\}$)

Πρόταση: $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε

i) $A \subseteq B \Rightarrow B^\circ \subseteq A^\circ$

ii) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

iii) $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$ $\quad \lambda \neq 0$ και $(\hat{S}(0,1))^\circ = \hat{S}(0,1)$.

Πρόταση: $A = A^\circ \Leftrightarrow A = \hat{S}_2(0,1)$

$(\Leftarrow)$ $x \in \hat{S}_2(0,1)$ | $y \in \hat{S}_2(0,1) \Rightarrow \langle x, y\rangle \overset{C-S}{\leq} 1 \Rightarrow x \in (\hat{S}_2(0,1))^\circ$

$(\Rightarrow)$ $x \in (\hat{S}_2(0,1))^\circ$ $\quad x \neq 0$ ($0 \in A^\circ$ πάντα) | $\frac{x}{\|x\|_2} \in \hat{S}_2(0,1)$

$\langle x, \frac{x}{\|x\|_2}\rangle = \|x\|_2 \leq 1 \Rightarrow x \in \hat{S}(0,1)$.

$x \in A = A^{\circ} \Rightarrow \langle x, x\rangle \leq 1 \Rightarrow \|x\|_2 \leq 1 \Rightarrow x \in \hat{S}_2(0,1)$

άρα $A \subseteq \hat{S}_2(0,1)$ $\quad (\hat{S}_2(0,1))^{\circ} = \hat{S}_2(0,1) \subseteq A^{\circ} = A$

Τελικά $A = \hat{S}_2(0,1)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Διπολικό Θεώρημα)

i) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A^{\circ\circ} = \overline{conv}(A \cup \{0\})$

δηλαδή $A^{\circ\circ}$ είναι το ελάχιστο κλειστό + κυρτό σύνολο που περιέχει το A και το 0.

ii) K = κυρτό + κλειστό + $(0 \in K)$ τότε $K = K^{\circ\circ}$

Απόδειξη: i) Θεωρούμε $a \in A$ τότε $\langle x, a\rangle \leq 1 \; \forall x \in A^{\circ}$

Τότε $a \in (A^{\circ})^{\circ}$ και $0 \in A^{\circ\circ}$ άρα $A \cup \{0\} \subseteq A^{\circ\circ}$

($A^{\circ\circ}$ κυρτό + κλειστό) $\Rightarrow \overline{con}(A \cup \{0\}) \subseteq A^{\circ\circ}$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό: Έστω $z_0 \notin \overline{conv}(A \cup \{0\}) \Rightarrow$

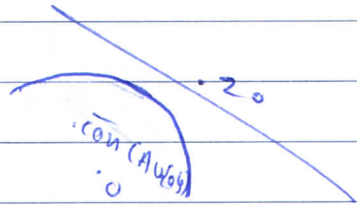
$\exists\, c \in \mathbb{R}$ και $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ τ.ώ: $\langle a, u\rangle < c < \langle z_0, u\rangle$

$a = 0 \in A \cup \{0\}$ τότε $c > 0$ άρα

$\{ \langle a, \frac{u}{c}\rangle < 1 \; \forall a \in A$ και $\langle z_0, \frac{u}{c}\rangle > 1 \}$

$\Downarrow$

$\{ \frac{u}{c} \in A^{\circ}$ και $\langle z_0, \frac{u}{c}\rangle > 1 \}$ άρα $z_0 \notin A^{\circ\circ}$



Θεώρημα: K κυρτό + κλειστό + $(0 \in K)$ (άρα $K = K^{\circ\circ}$)

Τότε ισχύουν τα εξής:

i) K φραγμένο $\Leftrightarrow 0 \in \varepsilon\sigma K^{\circ}$

ii) K° φραγμένο $\Leftrightarrow 0 \in \varepsilon\sigma K$

Απόδειξη: i) K φραγμένο $\Leftrightarrow \exists M > 0 : K \subseteq \hat{S}(0,M) \overset{\Theta}{\Leftrightarrow} \hat{S}^{\circ}(0,M) \subseteq K^{\circ} \overset{\Theta}{\Leftrightarrow}$

$\hat{S}(0, \frac{1}{M}) \subseteq K \quad (K^{\circ\circ} = K) \quad \Leftrightarrow 0 \in \varepsilon\sigma K^{\circ}$

ii) K° φραγμένο $\overset{i)}{\Leftrightarrow} 0 \in \varepsilon\sigma (K^{\circ})^{\circ} = \varepsilon\sigma K$. (Θ)

(K° κυρτό + κλειστό + $0 \in K^{\circ}$)

	K	K°
Συν.στηρ.	g_K	h_K
Συν.στηρ.	h_K	g_K

! ΘΕΩΡΗΜΑ ΒΑΣΙΚΟ: K κυρτό + κλειστό + $(0 \in \varepsilon \sigma K)$. Τότε

i) ορίζονται οι g_{K°, h_{K°

ii) $h_K = g_{K^\circ}$ και $h_{K^\circ} = g_K$

Απόδειξη: i) K° = κυρτό + κλειστό + $(0 \in \varepsilon\sigma K^\circ)$ γιατί το K είναι φραγμένο

άρα ορίζεται η g_{K°

K° = κυρτό + κλειστό + φραγμένο αφού $0 \in \varepsilon\sigma K$

άρα ορίζεται η h_{K°

ii) $K^\circ = \{x : \langle x, a\rangle \le 1 \ \forall a \in K\}$

$= \{x : h_K(x) \le 1\}$ (h_K το supremum)

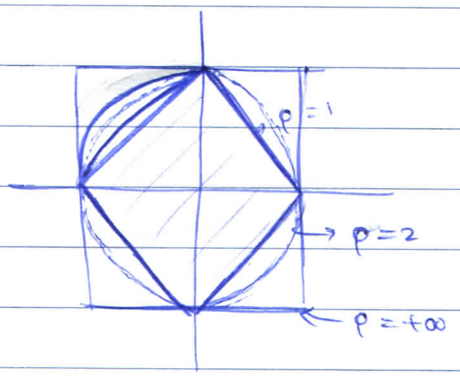
Άρα $h_K(x) = g_{K^\circ}$ (h_K θετ.ομ + κυρτή)

$g_K = g_{(K^\circ)^\circ} = h_{K^\circ}$

ΠΟΡΙΣΜΑ: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \ , i=1,..,n\}$

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, 1<p<\infty$

B_p οι κλειστές τους μπάλες



$(B_1)^\circ = B_\infty$ άρα $(B_\infty)^\circ = B_1$

$(B_p)^\circ = B_q$ όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Σημειώσεις: K = κυρτό + κλειστό + φραγμένο + $(0 \in \varepsilon\sigma K)$

0 = κέντρο βάρους του K

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n!)^2} \le V(K)\,V(K^\circ) \le \kappa_n^2$$

(Santalo 1949, Petty 1985)

(κ_n = όγκος της n-μον. σφαίρας)

ισότητα αν K ελλειψοειδές

άλυτο για $n \geq 3$

εικασία του simplex

ανοιχτό πρόβλημα

$n=2$ Mahler (1939) K = πολύγωνο

K = συμμετρικό ($K = -K$)

$V(K)\cdot V(K^\circ) \geq c^n \kappa_n^2$ c = σταθερά ανεξάρτητο του n και του K.

από τους Bourgain – Milmann (1985, 1987)

και Pissiev (1989).

Ακραία σημεία / σύνολα

Θ. Minkowski (στον $\mathbb{R}^n$)

Θ. Krein – Milman (σε $\langle X, \|\cdot\| \rangle$)

K = κυρτό, $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$

Ορισμοί

1) $x_0 \in K$ ακραίο σημείο $\Leftrightarrow$ $\exists\, y,z \in K$ $\lambda \in (0,1)$ με $(1-\lambda)y + \lambda z = x_0$ τότε $y,z = x_0$

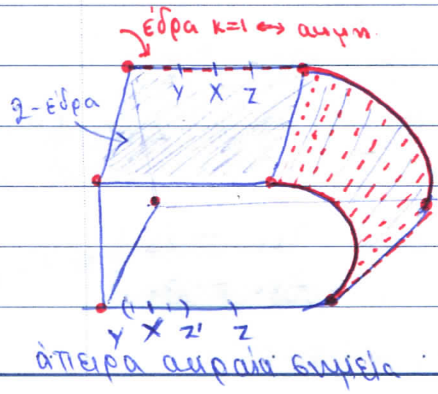
$\Leftrightarrow$ $\nexists\, (y,z) \subseteq K : x_0 \in (y,z)$

$\Leftrightarrow$ αν $x = \frac{y'+z'}{2}$ για κάποια $y', z' \in K$ τότε $y', z' = x_0$

Το σύνολο των ακραίων σημείων του K συμβολίζεται με $ext(K)$ και $ext(K) \subseteq rb(K)$

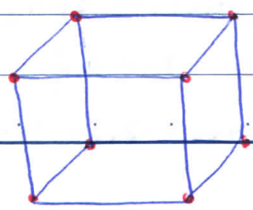
2) F κυρτό $\subseteq K$ ακραίο σύνολο ή έδρα του K $\Leftrightarrow$ $\exists$ουν $y,z \in K$, $\lambda \in (0,1)$ με $(1-\lambda)y + \lambda z \in F$. Τότε $y,z \in F$.

Αν $\emptyset \neq F \neq K$ τότε $F \subseteq rb(K)$ | Εάν $F = \{x_0\}$ ακραίο σύνολο = ακραίο σημείο

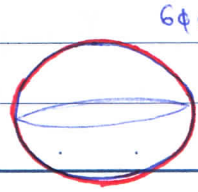


Αν $\dim F = k$, τότε F ονομάζεται k-έδρα

(k=1 είναι ακμή)



κύβος



σφαίρα όλα είναι ακραία

ΑΣΚΗΣΕΙΣ!

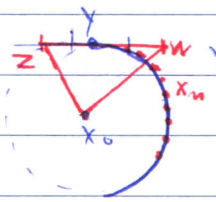
1) $K =$ κλειστό + φραγμένο + κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^n$ ή K συμπαγές + κυρτό $\subseteq (X, \|\cdot\|)$

(i) Αν $\dim K = 2$ $ext(K)$ είναι κλειστό

(ii) Αν $\dim K = 3$ να δοθεί παράδειγμα που το $ext(K)$ δεν είναι κλειστό

(iii) $ext(K)$ είναι G_δ-σύνολο ως υποσύνολο του K.

Λύση: (i) $\dim K = 2$, $K \subseteq \mathbb{R}^2$, $x_0 \in$ εσK



$x_n \in ext(K)$ $x_n \to y$

και $ext(K) \subseteq bdK$ κλειστό άρα $y \in bdK$

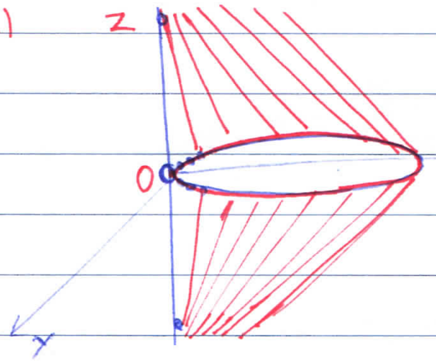
Έστω $y \notin ext(K)$ δηλαδή $\exists$ουν $z, w \in K$ $z \neq w$

με $y = \frac{z+w}{2}$. (μάλιστα $z, w \in bd(K)$)

Τα x_n βρίσκονται τελικά είτε στο εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές z, w, x_0 είτε στις πλευρές. Τελικά x_n βρίσκεται (από n_0 και πάνω) στο $[y, w]$, άτοπο αφού $x_n \in ext(K)$

(ή στο $[z, y]$)

(ii)



(iii) $i \in \mathbb{N}$ $F_i = \{x \in K : \exists$ουν $z, y \in K$ ώστε $x = \frac{y+z}{2}$ και $\|y - z\| \geq \frac{1}{i}\}$

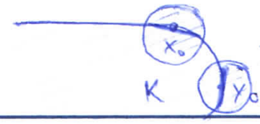
Το F_i είναι κλειστό διότι αν $x_\nu = \frac{y_\nu + z_\nu}{2}$ $\|y_\nu - z_\nu\| \geq \frac{1}{i}$

$x_\nu \xrightarrow{\nu \to \infty} x_0$

K συμπαγές (κλειστό + φραγμένο) άρα $\exists$ουν $\left.\begin{array}{l} y_{k_\nu} \to y_0 \\ z_{k_\nu} \to z_0 \end{array}\right\} x_0 = \frac{y_0 + z_0}{2}$

και $\|y_0 - z_0\| \geq \frac{1}{i}$

αφού $\|y_{k_\nu} - z_{k_\nu}\| \geq \frac{1}{i}$



Σχήμα

και $K \setminus \text{ext}K = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ (απλό)

Επομένως $\text{ext}K = \bigcap_{i=1}^{\infty} \underbrace{(K\cap \underset{\downarrow\ \text{ανοιχτό}}{F_i^c})}_{\text{ανοιχτό στο } K}$ — G_δ στο K //

2) K = κυρτό, $\dim K < \infty$, F κυρτό $F \subseteq K$. Τότε:

(i) F ακραίο σύνολο του $K \iff K\setminus F$ = κυρτό και $(\text{aff}F)\cap K = F$

(ii) $x_0 \in \text{ext}K \iff K\setminus\{x_0\}$ = κυρτό

(Στο (ii) μπορεί $K \subseteq \langle X, \|\cdot\|\rangle$)

Λύση: (i) "$\Rightarrow$": Έστω $y,z \in K\setminus F$ $y \neq z$, $x = (1-\lambda)y + \lambda z$ ($\in K$ αφού K κυρτό), $\lambda\in(0,1)$

Έστω ότι $x\in F$ (ακραίο σύνολο) $\Rightarrow y,z\in F$ αδύνατο.

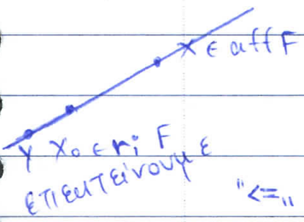
Άρα $x\in K\setminus F$, συνεπώς το $K\setminus F$ είναι κυρτό.

Ισχύει ότι $F\subseteq(\text{aff}F)\cap K$ ($F\subseteq K$). Για τον αντίστροφο εγκλεισμό:

Έστω $x\in(\text{aff}F)\cap K$. Υπάρχει $x_0\in \text{ri}F$ $(\subseteq F)$. Τότε $x_0 = (1-\lambda)x + \lambda y$

για κάποια $y\in F$ και $\lambda\in(0,1)$. Η F είναι ακραίο σύνολο και

$x,y\in K$ επομένως $x,y\in F$ δηλαδή $x\in F$ και άρα $(\text{aff}(K))\cap K\subseteq F$



"$\Leftarrow$": $y,z\in K$ $\lambda\in(0,1)$ $x=(1-\lambda)y+\lambda z\in F$ (αρκεί ν.δ.ο $y,z\in F$)

Έστω ότι $y,z\in K\setminus F$ τότε $x\notin F$ (αφού $K\setminus F$ κυρτό)

Άρα ένα τουλάχιστον από τα y,z είναι στο F. Έστω λοιπόν

$y\in F$. Τότε $z = \frac{1}{\lambda}x + \frac{\lambda-1}{\lambda}y$ με $x,y\in F\subseteq \text{aff}F$

οπότε $z\in\text{aff}F$ και $z\in K$ άρα $z\in(\text{aff}F)\cap K = F$

δηλαδή $z\in F$ και το F είναι ακραίο σύνολο του K.

3) Αν K = κυρτό + κλειστό, F = ακραίο σύνολο, τότε F είναι κλειστό

αφού $F = \underbrace{\text{aff}F}_{\text{κλειστό}}\cap\underbrace{K}_{\text{κλειστό}}$ = κλειστό (από προηγούμενη άσκηση)

Τοπολογικός χαρακτηρισμός:

4) K = κυρτό + συμπαγές. Τότε $x_0\in\text{ext}K \iff \forall\, r>0\ \exists\ H(u,c)=\{x\in\mathbb{R}^n: \langle x,u\rangle<c\}$

$(c\in\mathbb{R}, u\neq 0)$ ώστε $x_0\in K\cap H^-(u,c)\subseteq S(x_0,r)$

(ορίζεται βάση περιοχών)

Λύση: "$\Rightarrow$" : Έστω $x_0 \in ext K$ και $r>0$

$K \setminus S(x_0,r) =$ κλειστό $\subseteq K \xrightarrow{K \text{ συμπαγές}} K \setminus S(x_0,r) =$ συμπαγές

Έστω $L = conv(K \setminus S(x_0,r)) =$ κυρτό + συμπαγές

(πόρισμα Καραθεοδωρή).

Έστω $x_0 \in L \subseteq conv(K \setminus \{x_0\}) \overset{x_0 \in ext K}{\underset{ασκ.2}{=\!=}} K \setminus \{x_0\}$, άτοπο

Συνεπώς $x_0 \notin L$

Άρα $\exists\, u \neq 0,\ c \in \mathbb{R} : \langle x_0,u\rangle < c < \langle a,u\rangle\ \forall a \in L$. Επίσης,

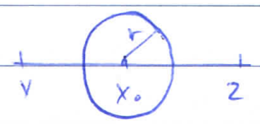
$x_0 \in H^-(u,c) \cap K$ και $\langle w,u\rangle > c\ \forall w \in K \setminus S(x_0,r)$, οπότε

$\langle w,u\rangle > c\ \forall w \in K,\ w \notin S(x_0,r)$

(Αν $\langle y,u\rangle < c$ $y \in K \Rightarrow y \in S(x_0,r)$)

"$\Leftarrow$" : Έστω $x_0 = \frac{y+z}{2}$ όπου $y \neq z$ και $y,z \in K$

Παίρνουμε $0<r<\|x_0-z\| = \|x_0-y\|$



$u \neq 0$ $c \in \mathbb{R}$ $\langle x_0,u\rangle < c$

$u \neq 0$ $c \in \mathbb{R}$ $\langle x_0,u\rangle < c$

Αν $w \in K$, $\langle u,w\rangle < c \Rightarrow w \in S(x_0,r)$ (υπόθεση)

Άρα $\langle u,y\rangle, \langle u,z\rangle \geq c$ αφού $y,z \notin S(x_0,r)$

επομένως $\langle u,x_0\rangle < c$ και $\langle u,x_0\rangle \geq c$ άτοπο

(Η σχέση $\langle u,x_0\rangle \geq c$ προκύπτει κάνοντας αντικατάσταση

δηλ. $\left.\begin{array}{l}\langle u,y\rangle \geq c \Rightarrow \langle u,\frac{y}{2}\rangle \geq \frac{c}{2} \\ \langle u,z\rangle \geq c \Rightarrow \langle u,\frac{z}{2}\rangle \geq \frac{c}{2}\end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \langle u,\frac{y+z}{2}\rangle \geq c \overset{x_0=\frac{y+z}{2}}{\Longrightarrow} \langle u,x_0\rangle \geq c$.)

5) (i) Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και K ένα μη κενό κυρτό $\subseteq X$ + κλειστό και $(A_i)_{i\in I}$ οικογένεια από ακραία υποσύνολα του K, A_i κλειστά $\forall i \in I$ τότε $\bigcap_{i\in I} A_i$ κλειστό ακραίο υποσύνολο του K

(ii) Αν $A \subset B \subset K$ τ.ω B ακραίο υποσύνολο του K και A ακραίο υποσύνολο του $B \Rightarrow A$ ακραίο υποσύνολο του K

$\rightarrow$

Λύση: (i) Έστω $x\in A$ και $y,z\in K$ $\lambda\in(0,1)$ τ.ω. $x=\lambda y+(1-\lambda)z$

$x\in A \Rightarrow x\in A_i\ \forall i\in I \Rightarrow y,z\in A_i\ \forall i\in I \Rightarrow y,z\in A$

Άρα A ακραίο κλειστό υποσύνολο του K

(ii) Έστω $x\in A$ ($\subseteq B$ ακραίο του K) και $y,z\in K$, $\lambda\in(0,1)$ τ.ώ: $x=\lambda y+(1-\lambda)z \Rightarrow x\in B \Rightarrow$

$y,z\in B \Rightarrow y,z\in A$

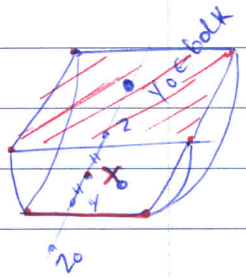
Παρατήρηση: Αν $B\subseteq K$ ακραίο υποσύνολο του K τότε $ext B\subseteq ext K$

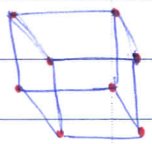
! **Θ. Minkowski**: $K\subseteq\mathbb{R}^n$ $K\neq\emptyset$, κυρτό + συμπαγές. Τότε:

(i) $K=con(ext K)$

(ii) αν $M\subseteq K$ και $K=con M \Rightarrow ext K\subseteq M$

Δηλαδή το σύνολο των ακραίων σημείων είναι το μικρότερο υποσύνολο του K που η κυρτή του θήκη δίνει το K.





Απόδειξη: (i) $ext K\subseteq K \Rightarrow con(ext K)\subseteq con K = K$ (K= κυρτό)

Έχουμε να αποδείξουμε ότι $K\subseteq con(ext K)$

Επαγωγή στο $\dim K = k$

Για $k=0$: $K=\{x\}$ μονοσύνολο $\{x\}=ext K$ και άρα ισχύει

Έστω ότι ισχύει για τυχαίο L= κυρτό και συμπαγές $\neq\emptyset$ με $\dim L=\nu-1$

Έστω K με $\dim K=\nu$ ($ext(K+z)=z+ext K$) υποθέτουμε ότι $K\subseteq\mathbb{R}^\nu$ (δηλ. $aff K=\mathbb{R}^n$)

Έστω λοιπόν $x_0\in K$:

- $x_0\in ext K \Rightarrow x_0\in con(ext K)$ ή
- $x_0\notin ext K$ άρα $x_0=\frac{y+z}{2}$ $y,z\in K$ $y\neq z$

$L=aff([y,z])\cap K$ (συμπαγές + κυρτό) $\dim L=1$ άρα $L=[y_0,z_0]$ $y_0\neq z_0$ και $y_0,z_0\in bdK$

$y_0\in bdK$ άρα $\exists H(u,c)$ ($u\in\mathbb{R}^\nu\setminus\{0\}$, $c\in\mathbb{R}$)

$\langle u,y_0\rangle=c$, $\langle u,a\rangle\le c$ $\forall a\in K$ (φέρον υπερεπίπεδο)

$F_{y_0}=H(u,c)\cap K$ $F_{y_0}\neq\emptyset$ κυρτό + συμπαγές

$\dim F_{y_0} \leq \dim (H(u,c)) = \nu - 1$, άρα από την επαγωγική υπόθεση $F_{y_0} = \text{co}(\text{ex}\, F_{y_0})$ και δείχνουμε ότι F_{y_0} = ακραίο σύνολο.

Έστω λοιπόν $x \in F_{y_0}$ $x = (1-\lambda) w_1 + \lambda w_2$ $\lambda \in (0,1)$ $w_1, w_2 \in K$

$\langle x, u \rangle = c$ $(x \in F_{y_0} \subseteq H(u,c))$ $\langle x, u \rangle = (1-\lambda)\langle w_1, u\rangle + \lambda \langle w_2, u \rangle \leq$

$\leq (1-\lambda)c + \lambda c = c$

Έπεται ότι $\langle w_1, u \rangle = \langle w_2, u \rangle = c$ δηλ. $w_1, w_2 \in H(u,c)$ και $w_1, w_2 \in K$ άρα $w_1, w_2 \in H(u,c) \cap K = F_{y_0}$

Άρα $y_0 \in \text{conv}(\text{ex}\, K)$ (παρατήρηση) αφού $\text{ex}\, F_{y_0} \subseteq \text{ex}\, K$.

Ομοίως $z_0 \in \text{conv}(\text{ex}\, K)$ και άρα $x_0 \in [y_0, z_0] \subseteq \text{co}(\text{ex}\, K)$

(ii) Έστω $M \subseteq K$ $(M \neq \emptyset)$ και $K = \overline{\text{conv}}\, M$. Θ.δ.ο $\text{ex}\, K \subseteq M$

Έστω αντίθετα ότι $\exists\, x_0 \in \text{ex}\, K$ και $x_0 \notin M$, τότε $M \subseteq K \setminus \{x_0\} \Rightarrow$

$K = \text{conv}\, M \subseteq \text{conv}(K \setminus \{x_0\}) = K \setminus \{x_0\}$ (άσκηση 2). Άτοπο.

Άρα $\text{ex}\, K \subseteq M$.

Πόρισμα: K = κυρτό + συμπαγές, $\dim K = \nu$ $(\nu \geq 1)$

Τότε για $x \in K$ υπάρχουν $x_1, \dots, x_N \in \text{ex}\, K$ με $N \leq \nu + 1$ ώστε $x = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i$ $\sum \lambda_i = 1$ και $\lambda_i > 0$

Θεώρημα: $f: K \to \mathbb{R}$, K κυρτό + συμπαγές, f κυρτή + συνεχής $(K \subseteq \mathbb{R}^n)$

Τότε υπάρχει $x_0 \in \text{ex}\, K$ ώστε $f(x_0) = \max\{f(x) : x \in K\}$

Απόδειξη: f συνεχής σε συμπαγές, άρα $\exists\, z \in K$ ώστε $f(z) = \max\{f(x) : x \in K\} = M$

$z = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ $\sum \lambda_i = 1$ $x_i \in \text{ex}\, K$ (από πόρισμα) $(\lambda_i > 0)$

Τότε $M = f(z) = f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i M = M$

Άρα υπάρχει $x_{i_0} \equiv x_0 \in \text{ex}(K)$: $f(x_0) = M$.

Σημείωση: Τι γίνεται σε απειροδιάστατο χώρο X με νόρμα?

- Αν το K έχει άπειρη διάσταση K = κυρτό + κλειστό + φραγμένο $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $\text{ex}\, K \neq \emptyset$ (όχι)
- " K = κυρτό + συμπαγές $\Rightarrow \text{ex}\, K \neq \emptyset$. Ισχύει ότι $K = \text{co}(\text{ex}\, K)$? (όχι)

– Παρουσίαση Θεωρήματος Krein-Milman –

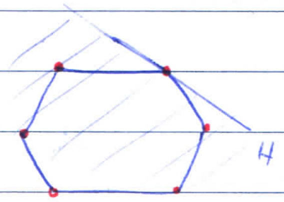
Άσκηση: Να βρεθούν τα εξής σύνολα:
(i) $ext(B_{C[0,1]})$, (ii) $ext(B_{C([0,1]\cup[2,3])})$

• Συμπληρωματικά: Εκτεθειμένα σημεία, ΘΕΩΡΗΜΑ Straszewicz (1935)

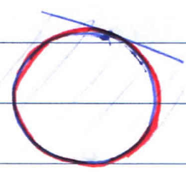
$\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$, K = κυρτό + κλειστό

Ορισμός: $x_0 \in K$ εκτ. σημείο $\Leftrightarrow \exists\, H(u,c) = \{x : \langle x,u\rangle = c\}$
τ.ώ. $\langle x_0,u\rangle = c$ και $\langle y,u\rangle < c$ $\forall\, y \in K\setminus\{x_0\}$
δηλαδή $\exists$ υπερεπίπεδο στήριξης στο x_0 ώστε $H\cap K = \{x_0\}$

π.χ. 1)



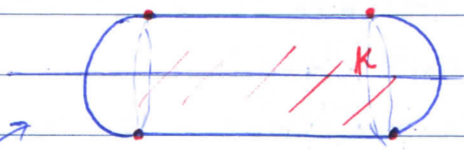
2)



Στα 2 προηγούμενα παραδείγματα $ext(K) = exp(K)$

Άσκηση: $exp K \subseteq ext K$
Να δοθεί παράδειγμα όπου $exp K \subsetneq ext K$

Λύση: $x_0 \in exp K$ $\quad x_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$, $y_1, y_2 \in K$
$c = \langle x_0,u\rangle = \frac{1}{2}(\langle y_1,u\rangle + \langle y_2,u\rangle) \leq c$
Επομένως $\langle y_1,u\rangle = c = \langle y_2,u\rangle$ δηλαδή $y_1 = y_2 = x_0$
και άρα $x_0 \in ext(K)$



στο $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ με περιστροφή γύρω από άξονα

Τα 4 σημεία του διπλανού σχήματος είναι ακραία αλλά όχι εκτεθειμένα.

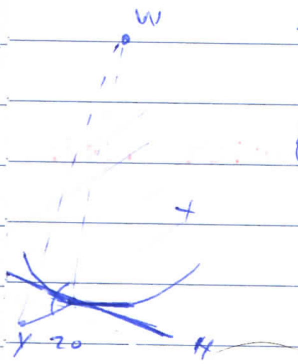
Πρόταση 1: $K =$ συμπαγές + κυρτό, $\dim K = n \geq 1$ και $w \in \mathbb{R}^n$ τυχαίο σημείο. Τότε $\exists\, z_0 \in K : \|w - z_0\| = \max\{\|w-a\| : a \in K\}$ και $z_0 \in exp(K)$

Απόδειξη: Προφανώς $z_0 \in bd K$

Παίρνουμε $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y - z_0, w - z_0\rangle = 0\}$

$z_0 \neq w$ (αφού $\dim K \geq 1$)

ή $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, w - z_0\rangle = c\}$



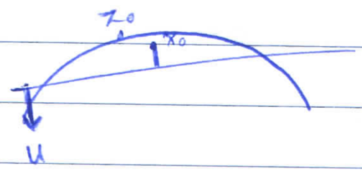
Έστω ότι $\exists\, y \in K$ με $y \neq z_0$ και $\langle y - z_0, w - z_0\rangle \leq 0$

Τότε $\|w-y\|^2 = \|(w - z_0) - (y - z_0)\|^2 = \|w - z_0\|^2 + \|y - z_0\|^2 -$
$- 2\langle y - z_0, w - z_0\rangle \geq \|w - z_0\|^2 + \|y - z_0\|^2 > \|w - z_0\|^2$

Άτοπο. Συνεπώς $\{z_0\} \in H \cap K$ και $\langle y - z_0, w - z_0\rangle > 0$ $\forall y \in K \setminus \{z_0\}$, δηλαδή $z_0 \in exp K$

Πρόταση 2: $K =$ κυρτό + συμπαγές, $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle < c\}$, $\|u\| = 1$.
Έστω $H^- \cap K \neq \emptyset$. Τότε $exp(K) \cap H^- \neq \emptyset$.

Υπόδειξη:



$w = x_0 + \lambda u \quad \lambda > \dfrac{\delta^2(K)}{2(c - \langle x_0, u\rangle)}$

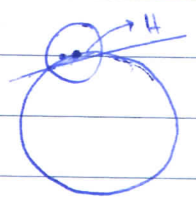
ΘΕΩΡΗΜΑ: (Straszewicz)

$K =$ κυρτό + συμπαγές, $\dim K = \mathbb{R}^n$

Τότε: (i) $ext(K) \subseteq \overline{exp(K)} \subseteq \overline{ext(K)}$

(ii) $K = \overline{conv}(exp K)$

Απόδειξη: (i) Έστω $x_0 \in ext K$, $r > 0$. Τότε (από άσκηση) υπάρχει H^- τέτοιος ώστε $x_0 \in K \cap H^- \subseteq S(x_0, r)$
δηλαδή $K \cap H^- \neq \emptyset$. Τότε από Πρόταση 2 έχουμε ότι υπάρχει $z_0 \in exp(K) \cap H^- \subseteq S(x_0, r)$



(ii) $K \overset{\text{Θ. Mink.}}{=} conv(ext(K)) \subseteq conv(\overline{exp}(K)) \subseteq \overline{conv}(exp(K)) \subseteq K$

Άρα $K = \overline{conv}(exp K)$.