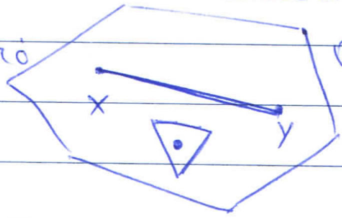
Περιεχόμενο Μαθήματος (2010-2011)

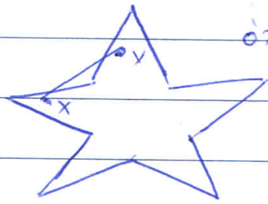
Ⓘ Μέρος: $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

- Κυρτό σύνολο K

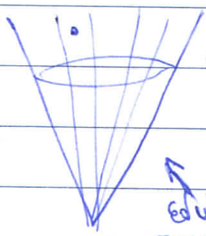
κυρτό



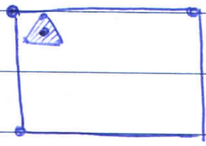
$\mathbb{R}^2$



όχι κυρτό



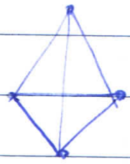
κυρτό $\mathbb{R}^3$



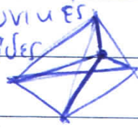
εδώ με τριγωνική πυραμίδα (4 σημεία)

{ και γενικά στον $\mathbb{R}^n$ για τον προσδιορισμό ενός σημείου απαιτούνται n+1 σημεία

3



έχει βάσεις τριγωνικές πυραμίδες

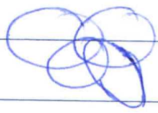


- Θεώρημα Καραθεοδωρή
- Συνδυαστικά Θεωρήματα

Α, Β, Γ, Δ κυρτά στον $\mathbb{R}^2$

Ανα 3 τέμνονται $\Rightarrow$ $A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

π.χ.



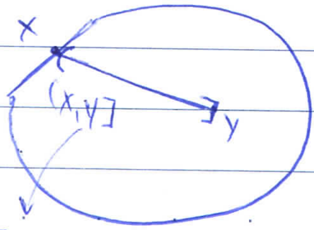
(Radon-Helly)

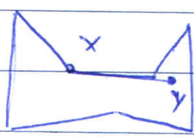
Κεφ 1. 1.1 §1-3

Κεφ 2. 2.1, 2.2, 2.3, 2.5 (2.5.1 + 2.5.2 μόνο) } Σημειώσεις Γιαννόπουλου

Ⓘⓘ Μέρος:

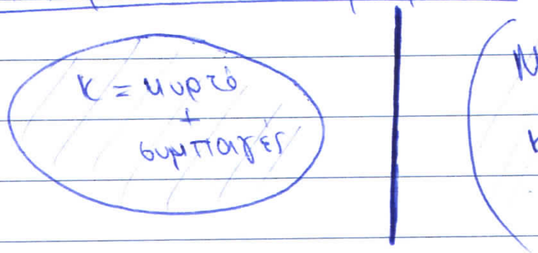
- Τοπολογικές ιδιότητες κυρτού συνόλου

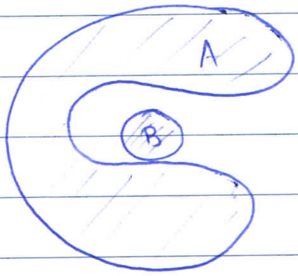




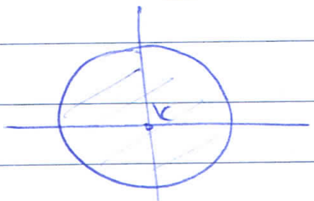
Τοπολογική ιδιότητα { στο εσωτερικό αφού y είναι στο εσωτερικό

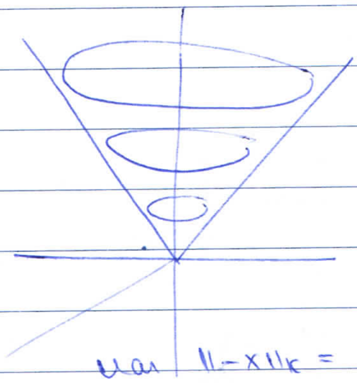
- Διαχωριστικά Θεωρήματα





όχι διαχωρισμός





$\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

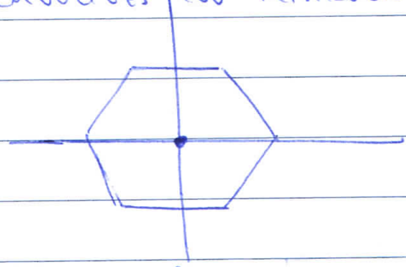
γράφημα νόρμας

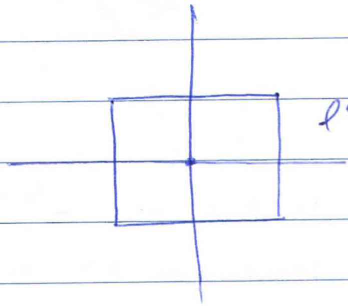
$\|x\|_K = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$ και $\|-x\|_K = \|x\|_K$ άρα πρέπει να είναι

συναρτησοειδές του Minkowski

συμμετρικό + κυρτό

για να ισχύει η τριγωνική ανισότητα στη νόρμα π.χ.

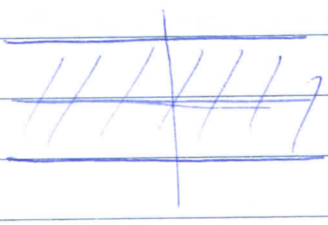


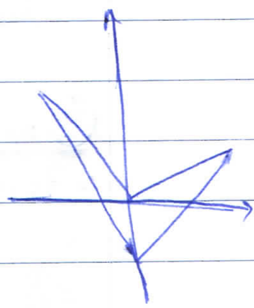


ℓ^∞ - νόρμα

Φραγμένα → νόρμες

μη φραγμένες → μη νόρμες

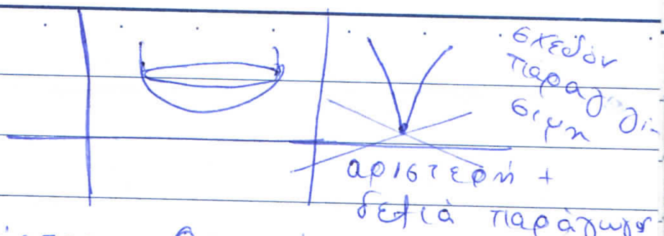




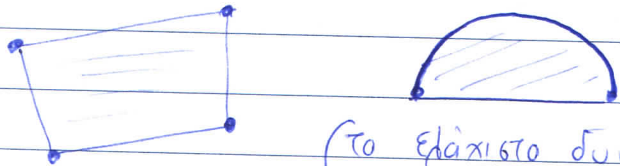
↝ Κεφ 4 Όλο Σημειώσεις Γιαννόπουλου

\+ Hahn - Banach (Συναρτησιακή)

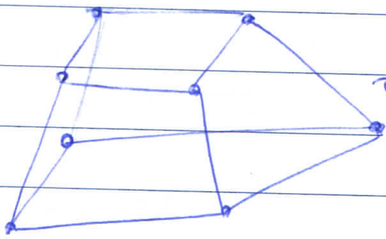
(III) ΜΕΡΟΣ : • Κυρτές συναρτήσεις
⇝ ΚΕΦ 5 (Σημ. Γιαννοπ)



(IV) ΜΕΡΟΣ : Ακραία σημεία και αντίστοιχα Θεωρήματα (π.χ. κορυφές)



Θεώρημα Minkowski
(το ελάχιστο δυνατό που παράγεται απ'τις κορυφές)
+ Θεώρημα Καραθεοδωρή



πολύτοπα (εδώ πολύεδρα)
V = # κορυφών (f_0)
E = # ακμές (f_1)
F = # επιφάνειες (f_2)

Euler $V - E + F = 2$.

$f_0 - f_1 + f_2 + \dots + (-1)^d f_d = \dots$ Σχέση Euler

⇝ ΚΕΦ 6 : 6.1, 6.2, Τ. Euler (ΛΕ-Δ)

(V) ΜΕΡΟΣ : • Ισοπεριμετρικό πρόβλημα / Ανισότητα
(Θεωρία Μεταβολής)

Δοθέντος του εμβ. περιφέρειας ποιο στερεό έχει το μεγαλύτερο όγκο
Η': " " όγκου " " " την ελάχιστη επιφάνεια
Λύση → Minkowski + Μεικτοί όγκοι Απ.: ΣΦΑΙΡΑ
(Λ.Ε-Δ)

1) Έννοιες και Θεωρήματα στο $\mathbb{R}^n$ σαν δ.χ διάστασης n $(n \geq 1)$.

1.1. Κυρτό σύνολο, κυρτός συνδυασμός, κυρτή θήκη

Εδώ χρειαζόμαστε το γεγονός ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι διαν. χώρος

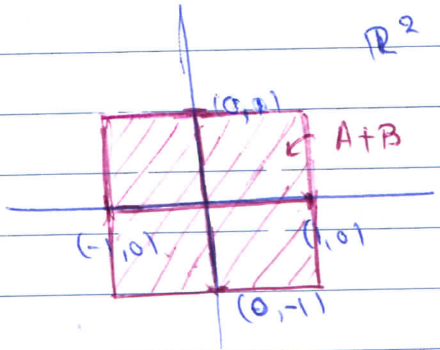
$$\left.\begin{array}{l} x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \\ y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n \end{array}\right\} \begin{array}{l} x+y:=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n) \\ \lambda x:=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n),\ \lambda\in\mathbb{R} \end{array}$$

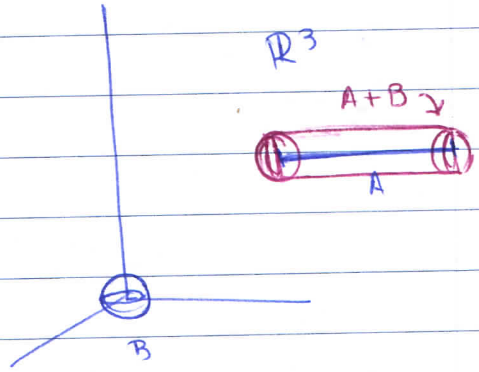
Τότε ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με τα προηγούμενα, έχει δομή διαν. χώρου.

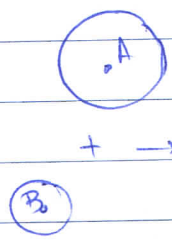
Πρόσθεση Minkowski, Βαθ. πολ μεταξύ $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$

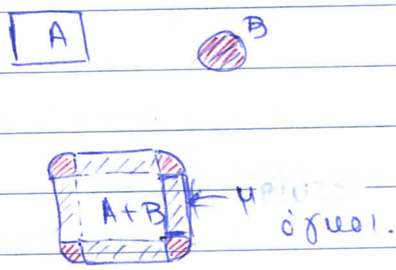
$$A+B=:\{a+b : a\in A,\ b\in B\} \qquad \lambda A=:\{\lambda a : a\in A\},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Π.χ.:







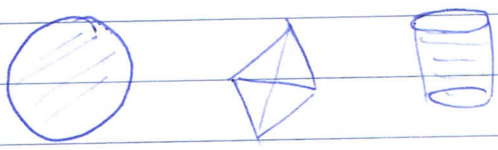


Ορισμός: Κυρτό σύνολο

$K\subseteq\mathbb{R}^n$ κυρτό $\iff$ $x,y\in K$ και $0\leq\lambda\leq 1$ τότε $(1-\lambda)x+\lambda y\in K$

$\iff$ $x,y\in K$ και $t_1,t_2\geq 0,\ t_1+t_2=1$ τότε $t_1x+t_2y\in K$

$\iff$ $x,y\in K$ $[x,y]=\{(1-\lambda)x+\lambda y : 0\leq\lambda\leq 1\}\subseteq K$.



κυρτά

μη κυρτά

1) Έστω $x,y \in K$, $x<y$ τότε αν $t\in(0,1)$: $(1-t)x+ty\in K$ $\Rightarrow$ $[x,y]\in K$ άρα K διάστημα, $x=\inf K$, $y=\sup K$

2) Έστω $x,y\in\bigcap_{i\in I}A_i$ τότε $x,y\in A_i\ \forall i\in I$. Έστω $t\in(0,1)$: $(1-t)x+ty\in A_i\ \forall i \Rightarrow (1-t)x+ty\in\bigcap_{i\in I}A_i$ όπου $\bigcap_{i\in I}A_i$: κυρτό. / 3) i) $A=[0,1]$, $B=[2,3]$ στο $\mathbb{R}$

ή $A=\{x,y\in\mathbb{R}: x^2+y^2=1\}$ και $B=\{x,y\in\mathbb{R}:(x-3)^2+(y-3)^2=1\}$

ii) Έστω $x,y\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ και $t\in(0,1)$. $\exists\, m\in\mathbb{N}$ ώστε $x,y\in A_m$: κυρτό άρα $(1-t)x+ty\in A_m\subseteq\bigcup A_i$

Θεωρούμε το $\emptyset$ κυρτό

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

1) $K\subseteq\mathbb{R}$ κυρτό $\Rightarrow$ K: διάστημα

2) $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένεια A_i κυρτά $\Rightarrow$ $\bigcap_{i\in I}A_i$ κυρτό

3) (i) Παράδειγμα $A,B\subseteq\mathbb{R}^2$, κυρτά ενώ $A\cup B$ όχι κυρτό

(ii) $A_1\subseteq A_2\subseteq\dots$

A_i κυρτά τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ = κυρτό

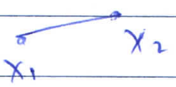
• **Ορισμός** Κυρτός συνδυασμός: $x_1,x_2,\dots,x_m\in\mathbb{R}^m$ και $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\ge 0$ τω: $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m=1$ το $x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_mx_m$ καλείται ένας κυρτός συνδυασμός των $x_1,x_2,\dots,x_m$.

• **Πρόταση**: $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{R}^m$, τ.ε.ε.ι.: (i) A κυρτό σύνολο

(ii) Κάθε κυρτός συνδυασμός σημείων του A ανήκει στο A.

Απόδειξη: (ii) $\Rightarrow$ (i): αν $x_1,x_2\in A$ τότε $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\in A$ με $\lambda_1+\lambda_2=1$

$\lambda_1,\lambda_2\ge 0$ $[x_1,x_2]\subseteq A$ άρα A κυρτό



(i) $\Rightarrow$ (ii): αν $x_1,x_2,\dots,x_m\in A$ και $\lambda_i\ge 0$ $i=1,\dots,m$ με $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$

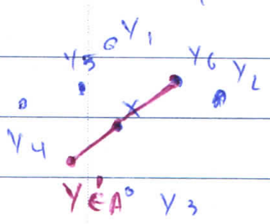
πρέπει ν.δ.ο το $x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_ix_i\in A$.

Για $m=2$ ισχύει γιατί το A είναι κυρτό.

Έστω ότι ισχύει για κυρτό συνδυασμό m σημείων

Έστω $y_1,y_2,\dots,y_m,y_{m+1}\in A$ $t_i>0$: $t_1+t_2+\dots+t_{m+1}=1$

Πρέπει ν.δ.ο $x=t_1y_1+\dots+t_my_m+t_{m+1}y_{m+1}\in A$



Επειδή $t_1+t_2+\dots+t_m+t_{m+1}=1$ $\Rightarrow$ $0<t_{m+1}<1$

$1-t_{m+1}>0$ γράφουμε:

$$x=(1-t_{m+1})\left[\frac{t_1}{1-t_{m+1}}y_1+\dots+\frac{t_m}{1-t_{m+1}}y_m\right]+t_{m+1}y_{m+1}$$

Παίρνουμε $y'=\frac{t_1}{1-t_{m+1}}y_1+\dots+\frac{t_m}{1-t_{m+1}}y_m$ τότε $\frac{t_i}{1-t_{m+1}}>0$ $i=1,\dots,m$

και $\sum_{i=1}^{m}\frac{t_i}{1-t_{m+1}}=1$ άρα $y'\in A$ και επιπλέον $(1-t_{m+1})+t_{m+1}=1$

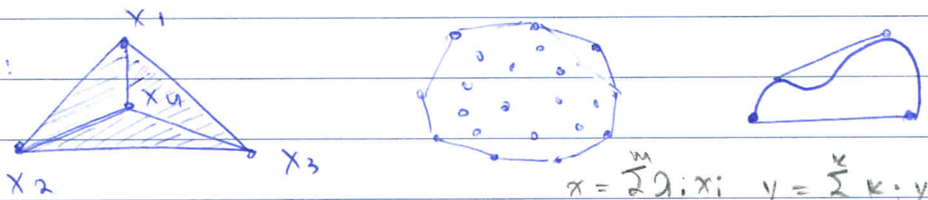
άρα το $x=(1-t_{m+1})y'+t_{m+1}y_{m+1}\in A$ (ό.έ.δ.)

1) Έστω $x \in conv(S_1)$ τότε $\exists$ουν $\lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{R}^+$ με $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1$ και $x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$ $x_i \in S_1$
αλλά $S_1 \subset S_2 \Rightarrow x_i \in S_2$ $\forall$ $i=1,\dots,m$ άρα $x \in conv(S_2)$

2) "$\Rightarrow$" Έστω $x \in S$ τότε αν $t \in (0,1)$ έχουμε $x = (1-t)x + tx \in conv(S)$
Έστω $x \in conv(S)$ τότε $\exists$ουν $\lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{R}^+$, $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1$ $x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i \in S$ (πρόταση)
"$\Leftarrow$" η $conv(S)$ είναι κυρτό σύνολο αφού
αν πάρουμε $x, y \in conv(S)$ τότε ⊛

Ορισμός Κυρτή θήκη $S \subseteq \mathbb{R}^n$: $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ $conv(S) = \{$όλοι οι κυρτοί συνδυασμοί σημείων του $S\}$.

Π.χ.:



⊛ $\exists$ουν $\lambda_1,\dots,\lambda_m, \kappa_1,\dots,\kappa_s \in \mathbb{R}^+$ και $x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_m \in S$: $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1 = \sum \kappa_j$ και
$x = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i$ $y = \sum_{j=1}^{k}\kappa_j y_j$ και αν $t \in (0,1)$ τότε
$(1-t)x + ty = \sum_{i=1}^{m}(1-t)\lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{k} t\kappa_j y_j$ και $\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{m}(1-t)\lambda_i = 1-t \\ \sum_{j=1}^{k} t\kappa_j = t\end{array}\right\} (+) = 1$
άρα $(1-t)x + ty \in conv(S)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow conv(S_1) \subseteq conv(S_2)$

2) S κυρτό $\Leftrightarrow S = conv(S)$

3) Η $conv(S)$ είναι το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το S δηλ.
δηλ. $\begin{cases} conv(S) \text{ είναι κυρτό} \\ \text{αν } A \supseteq S, A \text{ κυρτό} \Rightarrow conv(S) \subseteq A \end{cases}$

3) Έστω $S \subseteq A$: κυρτό, έστω $x, y \in S$ και $t \in (0,1)$, τότε
$(1-t)x + ty \in conv(S)$ και $x, y \in A \Rightarrow (1-t)x + ty \in A$
άρα $conv(S) \subseteq A$

δηλ. $conv(S) = \bigcap\{A : A \supseteq S, A \text{ κυρτό}\}$

4) $conv(A+B) = conv(A) + conv(B)$ (βλέπε 3ο θέμα τετραδίου)

5) A, B κυρτά $\Rightarrow A+B$ κυρτό, $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ $\lambda\mu > 0$
Ισχύει $(\lambda+\mu)\Gamma = \lambda\Gamma + \mu\Gamma$ $\lambda\mu > 0$, Γ τυχαίο

5) $a_1 + b_1 \in A+B$, $a_2 + b_2 \in A+B$ $t \in (0,1)$ τότε:
$(1-t)(a_1+b_1) + t(a_2+b_2) = (1-t)a_1 + ta_2) + ((1-t)b_1 + tb_2) \in A+B$ άρα $A+B$: κυρτό
Αν το Γ είναι μη κυρτό δεν ισχύει, υπάρχουν $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ και $t \in (0,1)$ ώστε $(1-t)\gamma_1 + t\gamma_2 \notin \Gamma$, $\lambda = 1-t$, $\mu = t$.

• Ειδικές κλάσεις κυρτών συνόλων

i) Κυρτό σώμα (του $\mathbb{R}^n$) : K = κυρτό και $K^\circ \neq \emptyset$ ($\exists$ $S(x_0, \varepsilon) \subseteq K$) $\varepsilon > 0$

ii) $K = conv\{x_1,\dots,x_k\}$ πολύτοπο

2.) Θ. Καραθεοδωρή, Radon, Helly !

• Εδώ χρησιμοποιούμε ότι ο $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση n

$S = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $m \geq n+1$

S - γραμμικώς εξαρτημένο σύνολο, δηλ. υπάρχουν $\exists \lambda_i$ $i=1,\dots,m$ με τουλ. ένα i_0 : $\lambda_{i_0} \neq 0$ και $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m = 0$.

$\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, $k \geq n+2$

$\{y_1 - y_k, \dots, y_{k-1} - y_k\}$ είναι $k-1 \geq n+1 \Rightarrow \exists$ουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ όχι όλα μηδέν ώστε $\lambda_1(y_1 - y_k) + \dots + \lambda_{k-1}(y_{k-1} - y_k) = 0 \Leftrightarrow$

$y_k = \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i} y_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i} y_{k-1}$ $\quad \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i = \lambda_k$

Άρα αν $S=\{y_1,\dots,y_k\}$ $k\geq n+2$ τότε $\exists$ αν λ_i όχι όλα μηδέν:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{k-1}+\lambda_k=0 \quad \text{και} \\ \lambda_1 y_1+\dots+\lambda_{k-1}y_{k-1}+\lambda_k y_k=0 \end{cases}$$

Θ. Καραθεοδωρή: $S\neq\emptyset$, $S\subseteq\mathbb{R}^n$ και έστω $z\in conv(S)$ τότε $\exists$ουν $y_1,\dots,y_{n+1}\in S$ ώστε $z=t_1y_1+\dots+t_{n+1}y_{n+1}$ όπου $t_i\geq 0$ $i=1,\dots,n+1$ και $t_1+\dots+t_{n+1}=1$

$conv(S)=\left\{\sum_{i=1}^{n+1} t_iy_i,\ y_1,\dots,y_{n+1}\in S,\ t_i\geq 0\ \sum t_i=1\right\}$

Απόδειξη: Έστω $z=t_1y_1+\dots+t_my_m$ και $m\geq n+2$.

$\{y_1,\dots,y_m\}\subseteq S$ $t_i\geq 0$ $\sum_{i=1}^m t_i=1$

$\exists$ουν $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ όχι όλα μηδέν με $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m=0$ και $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\dots+\lambda_my_m=0$

$I=\{i\in\{1,\dots,m\}:\lambda_i>0\}\neq\emptyset$ $J=\{j\in\{1,\dots,m\}:\lambda_j\leq 0\}\neq\emptyset$

$t=\frac{t_{i_0}}{\lambda_{i_0}}=\min\left\{\frac{t_i}{\lambda_i},\ i\in I\right\}$. Ορίζουμε $b_i=t_i-\tau\lambda_i$, τότε

για $i=i_0$ τότε $b_{i_0}=t_{i_0}-\tau\cdot\lambda_{i_0}=0$

για $i\neq i_0$ — $i\in I$: $t<\frac{t_i}{\lambda_i}\iff b_i\geq 0$

— $i\in I$: $\lambda_i\leq 0$ άρα $-\tau\lambda_i\geq 0 \Rightarrow b_i=t_i-\tau\lambda_i\geq 0$

$b_1+b_2+\dots+b_m=\sum_{i=1}^m t_i-\tau\cdot\sum_{i=1}^m\lambda_i=1-\tau\cdot 0=1$

$z=\sum_{i=1}^m t_iy_i=\sum_{i=1}^m(b_i+\tau\lambda_i)y_i=\sum_{i=1}^m b_iy_i+\tau\cdot\overbrace{\sum_{i=1}^m\lambda_iy_i}^{0}=\sum_{i=1}^m b_iy_i$

$=\sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^m b_iy_i$ άρα γράφεται ως γραμ. συνδυασμός $m-1$ σημείων

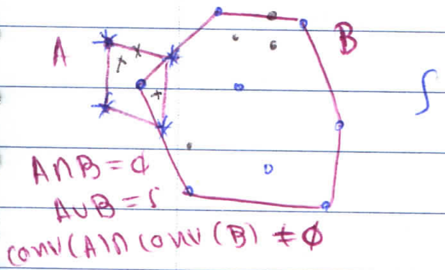
• ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ, RADON, HELLY :

Η απόδειξη των θεωρημάτων αυτών στηρίζεται στο ότι η $\dim(\mathbb{R}^n)=n$.
Αναλυτικότερα: $S=\{x_1,x_2,\dots,x_{n+1},x_{n+2}\}\subseteq\mathbb{R}^n$
Τότε $\{x_1-x_{n+2},\ x_2-x_{n+2},\dots,x_{n+1}-x_{n+2}\}$ γραμ. εξαρτημένο και το $(n+2)$ είναι ο μικρότερος δυνατός που ισχύει για τυχαίο A με m-σημεία $(m\geq n+2)$.
Άρα $\exists \lambda_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,n+1$ όχι όλα μηδέν: $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i(x_i-x_{n+2})=0$

$$\left\{\begin{array}{l}\exists\ \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n+1},\lambda_{n+2}\ \left(=-\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\right)\ \text{όχι όλα μηδέν} \\ \text{με}\ \lambda_1x_1+\dots+\lambda_{n+1}x_{n+1}+\lambda_{n+2}x_{n+2}=0,\quad \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2}=0\end{array}\right\}$$

Θ.Κ.: $S\neq\emptyset\subseteq\mathbb{R}^n$ $\quad \mathrm{conv}(S)=\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\mu_i x_i,\ \mu_i\geq 0,\ \sum\mu_i=1,\ x_i\in S\right\}$
(Θεώρημα Καραθεοδωρή)

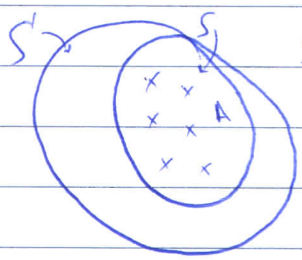
Θ. Radon (1921): $S=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}\subseteq\mathbb{R}^n$ και $m\geq n+2$. Τότε $\exists$ουν $A,B\neq\emptyset\subseteq\mathbb{R}^n$ με $A\cap B=\emptyset$, $S=A\cup B$ και $\mathrm{conv}(A)\cap\mathrm{conv}(B)\neq\emptyset$.



Απόδειξη: α' περίπτωση: $m=n+2$
$S=\{x_1,x_2,\dots,x_{n+2}\}\subseteq\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχουν $\lambda_i\in\mathbb{R}$ όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{n+2}=0$ (1) και $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_{n+2}x_{n+2}=0$. Τότε από (1):
$I=\{i\in\{1,2,\dots,n+2\}:\lambda_i>0\}\neq\emptyset$ $\quad J=\{j\in\{1,\dots,n+2\}:\lambda_j\leq 0\}\neq\emptyset$
$I\cup J=\{1,\dots,n+2\}$ και $I\cap J=\emptyset$.
Έστω $I=\{1,2,\dots,\nu\}$ και $J=\{\nu+1,\dots,n+2\}$ χωρίς βλάβη της γενικότητας. Ορίζουμε $A=\{x_1,x_2,\dots,x_\nu\}$ και $B=\{x_{\nu+1},\dots,x_{n+2}\}$
τότε προφανώς $S=A\cup B$, $A\cap B=\emptyset$
Έστω $\lambda=\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i>0$ και άρα $\lambda=\sum_{j=\nu+1}^{n+2}\lambda_j$ $\quad$ (* αφού $\lambda_1+\dots+\lambda_\nu+\lambda_{\nu+1}+\dots+\lambda_{n+2}=0$, $\lambda_1x_1+\dots+\lambda_\nu x_\nu+\lambda_{\nu+1}x_{\nu+1}+\dots+\lambda_{n+2}x_{n+2}=0$)
Έστω $x=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{\lambda_i}{\lambda}x_i\in\mathrm{conv}(A)$ $\quad\left(\frac{\lambda_i}{\lambda}>0,\ i=1,\dots,\nu,\ \sum_{i=1}^{\nu}\frac{\lambda_i}{\lambda}=1\right)$
αλλά $x\overset{*}{=}\sum_{j=\nu+1}^{n+2}-\frac{\lambda_j}{\lambda}x_j\in\mathrm{conv}(B)$ $\left(-\frac{\lambda_j}{\lambda}\geq 0\ \ j=\nu+1,\dots,n+2,\ \sum_{j=1}^{n+2}-\frac{\lambda_j}{\lambda}=1\right)$
άρα $x\in\mathrm{conv}(A)\cap\mathrm{conv}(B)\ (\neq\emptyset)$

β' περίπτωση: $S' = \{x_1, \dots, x_m\}$, $m > n+2$

$S \subseteq S'$ με $|S| = n+2$ (πληθικότητα) τότε



$S = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $conv(A) \cap conv(B) \neq \emptyset$ από α' περίπτωση.

Παίρνουμε ως $A' = A \cup (S' \setminus S)$ και $B' = B$

Παρατηρούμε ότι $S' = A' \cup B'$ $A' \cap B' = \emptyset$

και $\emptyset \neq conv(A) \cap conv(B) \subseteq conv(A') \cap conv(B')$

(αφού $A \subseteq A'$ και $B' = B$). //

Θ. Helly: $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ $m \geq n+1$ με A_i <u>κυρτό</u> $\forall i = 1, 2, \dots, m$ $\subseteq \mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα ότι κάθε $n+1$ από αυτά έχουν μη κενή τομή (δηλαδή $\forall$ I σύνολο δεικτών $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ ισχύει $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{n+1}} \neq \emptyset$)
Τότε $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m \neq \emptyset$.

Απόδειξη: Για οικογένεια $m = n+1$ συνόλων ισχύει ο ισχυρισμός. Έστω ότι ισχύει για οικογένεια $m \geq n+1$. Θα αποδείξουμε για οικογένεια $m+1$ συνόλων.

$\{B_1, B_2, \dots, B_{m+1}\}$ B_i = κυρτά με την ιδιότητα: κάθε οικογένεια $(n+1)$ συνόλων από αυτή έχει τομή $\neq \emptyset$. Τότε θα υπάρχει $x_1 \in B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_{m+1}$ και

και $x_2 \in B_1 \cap B_3 \cap \dots \cap B_{m+1}$, $\dots$, $x_{m+1} \in B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m$

Εάν κάποια συμπίπτουν π.χ. $x_1 = x_2$ τότε $x_1 = x_2 \in B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{m+1}$ και τελειώσαμε.

Αλλιώς θα είναι όλα διαφορετικά $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{m+1}\}$ $(m+1) \geq n+2$

από Θ. Radon (με αναδιάταξη) θεωρούμε $A = \{x_1, \dots, x_\nu\}$, $B = \{x_{\nu+1}, \dots, x_{m+1}\}$

τότε $S = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ και $conv(A) \cap conv(B) \neq \emptyset$

Τότε $A \subseteq B_{\nu+1} \cap B_{\nu+2} \cap \dots \cap B_{m+1}$ και $B \subseteq B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_\nu$

$conv(A) \subseteq B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{m+1}$ (αφού B_i = ΚΥΡΤΑ και άρα και η τομή τους και η κυρτή θήκη είναι το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το A)

και $conv(B) \subseteq B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_\nu$

και $\emptyset \neq conv(A) \cap conv(B) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m+1} B_i$

Ερώτημα: Εάν $\{A_i : i \in I\}$ άπειρη οικογένεια κυρτών συνόλων τ.ώ: κάθε $(n+1)$ από αυτά έχουν τομή $\neq \emptyset$. Είναι η $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$;

ΟΧΙ: π.χ. $A_k = [k, +\infty)$ $k \in \mathbb{N}$ κυρτά $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$
(κλειστά και όχι φραγμένα)

$B_k = (0, \frac{1}{k}]$ $k \in \mathbb{N}$ κυρτά $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$
(φραγμένα αλλά όχι κλειστά)

Θ. Bárány (1982): $\{S_i : i = 1, \dots, n+1\}$ $0 \in conv(S_i)$ $i = 1, \dots, n+1$. Τότε $\exists$ ουν $v_1 \in S_1$, $v_2 \in S_2, \dots, v_{n+1} \in S_{n+1}$ με $0 \in conv(\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\})$
(Απόδειξη αργότερα) (έγχρωμο Θεώρημα Καραθεοδωρή)

ΑΣΚΗΣΗ: $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (1,3)$, $x_3 = (4,3)$, $x_4 = (4,0)$

$x = (\frac{7}{4}, \frac{5}{4}) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{12}x_4$

Να γραφεί το x ως κυρτός συνδυασμός των x_1, x_2, x_3 χρησιμοποιώντας τη διαδικασία της απόδειξης του θεωρήματος του Καραθεοδωρή.

→ Υπενθυμίσεις από Πραγματική Ανάλυση και Συναρτησιακή Ανάλυση.

Χώρος με νόρμα: $X \neq \emptyset$ δ.χ. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$
i) $\|x\| \geq 0$. Αν $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$
iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ΟΡΙΣΜΟΙ: 1) $\varepsilon > 0$ $S_X(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ (ανοιχτή σφαίρα)

$r \geq 0$ $\hat{S}_X(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$ (κλειστή σφαίρα)

2) $\emptyset \neq Y \subseteq X$ Ορίζουμε $S_Y(y_0, \varepsilon) = S_X(y_0, \varepsilon) \cap Y$ ($y_0 \in Y$, $\varepsilon > 0$) και $\hat{S}_Y(y_0, r) = \hat{S}_X(y_0, r) \cap Y$.

3) $A \subseteq X$ ανοιχτό $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A$ $\exists$ $S_X(a, \varepsilon) \subseteq A$

$B \subseteq Y$ ανοιχτό στον Y $\Leftrightarrow$ $\forall b \in B$ $\exists$ $S_Y(b, \varepsilon) \subseteq B$

$B \subseteq Y$ κλειστό στον Y $\Leftrightarrow$ $Y \setminus B$ ανοιχτό στον Y.

4) $\Gamma \subseteq Y$ φραγμένο $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$: $\Gamma \subseteq S_Y(0, M)$

5) $K \subseteq Y$ $\overline{K}^Y = \bigcap \{B \subseteq Y : K \subseteq B, B$ κλειστό στο $Y\}$
λέγεται κλειστή θήκη ή κλειστότητα

Εάν το Y είναι κλειστό σύνολο τότε $\overline{K}^{Y} = \overline{K}^{X}$

6) $A \subseteq X$ συμπαγές $\Leftrightarrow$ για τυχαία ανοιχτή κάλυψη του A, δηλαδή $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, A_i ανοιχτά στο X, τότε $\exists\, J$ = πεπ. $\subseteq I$: $A = \bigcup_{j \in J} A_{i_j}$.

⊛ Ισχύει το εξής: Αν $B \subseteq Y$ συμπαγές $\Leftrightarrow$ $B \subseteq X$ συμπαγές

7) $f: X \to \mathbb{R}$ γραμμική απεικόνιση $\Leftrightarrow$ $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\forall\, x, y \in X$.

8) $f \neq 0$, f γραμμική και $c \in \mathbb{R}$, τότε $H_{f,c} = \{x \in X : f(x) = c\}$ καλείται υπερεπίπεδο του X.

Ισχύουν τα εξής σε $\langle X, \|\cdot\| \rangle$:

1) K συμπαγές $\Rightarrow$ K κλειστό + φραγμένο
2) $K_1 \subseteq K$, $K_1 = \overset{(\not\Leftarrow)}{\text{κλειστό}}$, K συμπαγές $\Rightarrow$ K_1 συμπαγές
3) $f: (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (X', \|\cdot\|_{X'})$ συνεχής
K = συμπαγές $\Rightarrow$ $f(K)$ = συμπαγές

ΑΣΚΗΣΗ: $S(x, \varepsilon)$, $\hat{S}(x, r)$ κυρτά σύνολα

! Στον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

1) $\hat{S}(0,1)$ συμπαγές (**Heine- Borel:** $[a, b]$ συμπαγές) supremum
2) K = κλειστό + φραγμένο $\Rightarrow$ K : συμπαγές
3) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική $\Rightarrow$ f συνεχής
4) $f \neq 0$ γραμμική $H_{f,c}$ κλειστό $\subseteq \mathbb{R}^n$

Από τα παραπάνω που ισχύουν στο $\mathbb{R}^n$ αποδεικνύεται ότι: Τ.Ε.Ε.Ι: για $(X, \|\cdot\|)$

i) $\hat{S}_X(0,1)$ είναι συμπαγές
ii) $K \subseteq X$ κλειστό και φραγμένο $\Rightarrow$ K συμπαγές
iii) Κάθε γραμμική είναι συνεχής.
iv) $\dim(X) < +\infty$ (μόνο εδώ κλειστά + φραγμένα = συμπαγή)

• Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$

Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$

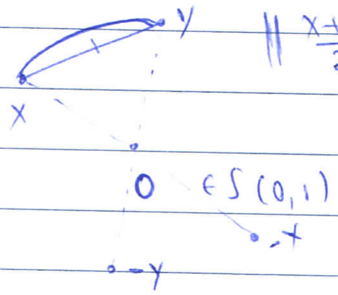
$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cauchy - Swartz

και $|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| \iff y = \lambda x \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Άσκηση: $\hat{S}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}$ το σύνορό της $bd\,\hat{S}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα $[x, y]$ με $x \ne y$.

Λύση: Έστω $x, y \in \hat{S}(0,1)$ και $x \ne y$ $[x, y] \subseteq bd\,\hat{S}(0,1)$



$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|$ Δεν γίνεται να έχουμε $y = \lambda x$ τότε $|\lambda| = 1$ άτοπο (βλέπε σχήμα)

άρα από Cauchy - Swartz

άρα $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2}\|y\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x+y}{2} \in S(0,1)$. Άτοπο.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική (και συνεχής $n < \infty$)

με $f \not\equiv 0$, τότε $\exists\, \vec{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : f(x) = \langle x, a \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ (Ritz)

[αν $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ ορθοκανονική βάση, $a = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$]

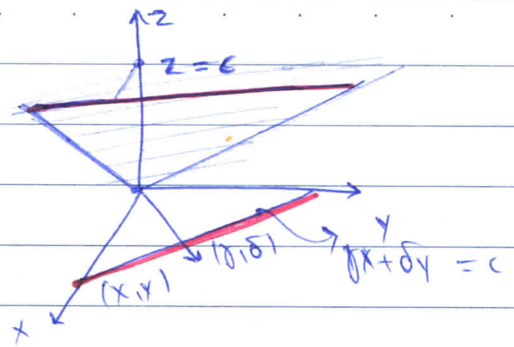
Επεξήγηση:

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow f(x) = \langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \rangle = \langle x, a \rangle$

$H_{f,c} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$ αν $f \to a \quad (f(x) = \langle x, a \rangle)$

$H_{a,c} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle = c\}$ χωρίς βλάβη της γενικότητας $\|a\| = 1$

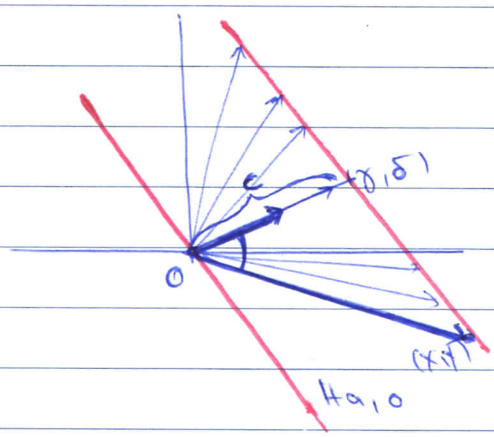
π.χ. Στον $\mathbb{R}^2$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x, y) = \alpha x + \beta y = \langle (x, y), (\gamma, \delta) \rangle$.



$(x, y, \underset{\overset{\shortparallel}{z}}{\gamma x + \delta y}) \in \mathbb{R}^3$

άρα θα είναι επίπεδο το γράφημα της f

$H_{a,c} = \{(x,y) : (x,y)\cdot(\gamma,\delta) = c\}$



Στον $\mathbb{R}^2$: ευθείες ≡ υπερεπίπεδα

Στον $\mathbb{R}^3$: επίπεδα ≡ υπερεπίπεδα

$H_{v,c}$ είναι κλειστό σύνολο (αντίστροφη εικόνα κλειστού)

$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v\rangle > c\}$

$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v\rangle < c\}$

• **Πόρισμα** του Θεωρήματος Καραθεοδωρή:

$S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\neq \emptyset$, S = συμπαγές

τότε $\text{conv}(S)$ είναι συμπαγές

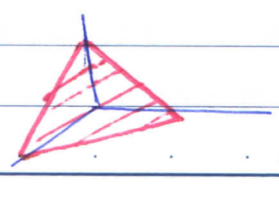
Ιδιαίτερα, τα πολύτοπα $(P = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_k\}))$ είναι συμπαγή!

Απόδειξη: (Θεώρημα Καραθεοδωρή: $x \in \text{conv}\, S \iff \exists$ουν $x_1, \dots, x_{n+1} \in S$ (ή λιγότερα) ώστε $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}$, $\lambda_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$)

Θέτουμε:

$\Delta = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ με $\lambda_i \geq 0$ $\forall i = 1, \dots, n+1$ και $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$

(π.χ. στον $\mathbb{R}^3$



) Το Δ είναι συμπαγές

$f: \Delta \times \underbrace{S \times S \times \cdots \times S}_{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) := \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1}$

τότε η f είναι συνεχής.

στο $\Delta \times \underbrace{S \times \cdots \times S}_{n+1 \text{ φορές}}$ = συμπαγές

$\uparrow$ συμπαγές $\quad \uparrow$ συμπαγές

και συνεχής εικόνα συμπαγούς = συμπαγές

Άρα $f(\Delta \times S \times \cdots \times S)$ = συμπαγές, αλλά $f(\Delta \times S \times \cdots \times S) \overset{\text{Θ.Car}}{=} \operatorname{conv}(S)$

άρα $\operatorname{conv}(S)$ συμπαγές.

- **Παράδειγμα:** Σε χώρο άπειρης διάστασης, που δεν ισχύει το πόρισμα

$\ell^2 = \{x = (x_1, x_2, \ldots) : \sum x_i^2 < +\infty\}$

$\|x\| = (\sum x_i^2)^{1/2}$ (περιέχει κάθε ευκλείδειο χώρο)

$u_n = (0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{n}, 0, \ldots) \in \ell^2$

$A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ είναι συμπαγές

$\operatorname{conv}(A) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leq 1\}$ (είναι και το 0)
$k \in \mathbb{N}$

$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^n} u_n \in \operatorname{conv}(A)$

$x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2^k}, \ldots) \in \ell^2 \qquad x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\ell^2}} x$

και $x \notin \operatorname{conv}(A)$, άρα $\operatorname{conv}(A)$ δεν είναι καν κλειστό

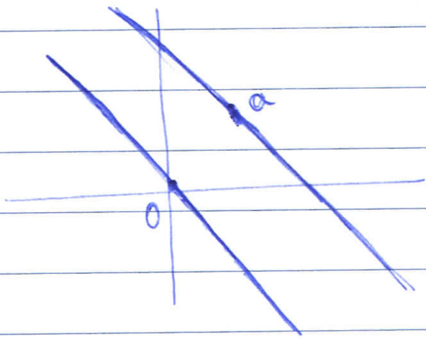
II. ΜΕΡΟΣ: Τοπολογικές ιδιότητες κυρτού συνόλου, Μετρική προβολή
Επίπεδα στήριξης (Φέροντα επίπεδα, support hyperplanes)
Διαχωριστικά Θεωρήματα

Λίγη affine - γεωμετρία: (1) Affine υπόχωροι (αφινικούς, συσχετισμένους, ομοπαραλληλικούς).

Ορισμός: (Affine υποχώρου) $A = x + L$, L γραμμικός υπόχωρος και $x \in \mathbb{R}^n$ τότε ο A καλείται affine υπόχωρος.

Εύκολα βλέπουμε ότι αν $A = x + L \Rightarrow x \in A$ $(0 \in L)$

Ισχύει: $A = a + L$ $\forall a \in A$



Έστω $\mathbb{R}^n \supseteq L \ni 0$. M = γρ. υπ. Έστω $x + L = y + M$

τότε $\underline{L = M}$

$L = (y-x) + M$

$0 \in L \Rightarrow (y-x) + \underset{\in M}{m} = 0 \Rightarrow$

$x - y \in M$ = γρ. υπόχωρος $\Rightarrow$

$y - x \in M$

άρα $L = (y-x) + M = M$

- <u>Συμπέρασμα</u>: $A = a + L$ ο L είναι μοναδικός γραμμικός υπόχωρος. (δε χρειάζεται η αρχή των αφόνων για να μετρήσω διάσταση)
- <u>Διάσταση affine χώρου</u>: $A = a + L$, L = γρ υπόχωρος

  Ορίζουμε $\dim(A) = \dim(L)$

  Αν $\dim(A) = 1 \Rightarrow A$ καλείται ευθεία

  Αν $\dim(A) = n-1 \Rightarrow A$ είναι υπερεπίπεδο.

- <u>Ορισμός</u>: <u>Affine συνδυασμός</u>, <u>Affine θήκη</u>

Το $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ $\quad x_i \in \mathbb{R}^n$ $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$ και $\underline{\lambda_i \in \mathbb{R}}$

καλείται <u>affine συνδυασμός των $x_1, x_2, \dots, x_k$.</u>

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε $\quad \mathrm{aff}(S) = \{\sum_{i=1}^{v} \lambda_i x_i,\ x_i \in S,\ v \in \mathbb{N},\ \sum \lambda_i = 1,\ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$

και λέγεται affine θήκη (αφινική θήκη)

- <u>Ορισμός</u>: <u>Affine ανεξαρτησία και εξάρτηση</u>

  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ <u>affine ανεξάρτητα</u> $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ με $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$ τότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$

<u>affine εξαρτημένα</u>: όταν δεν είναι affine ανεξάρτητα

$\Leftrightarrow$ Έχουν λ_i όχι όλα μηδέν με $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$ και $\sum \lambda_i x_i = 0$

Συνολα, βλέπουμε τα εξής:

(i) Αν $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \in S \Rightarrow aff(S) = span(S)$ (ο ελάχιστος υπόχωρος που περιέχει το σύνολο)

(ii) Από αυτό βγαίνει ότι $aff(S)$ = affine υπόχωρος

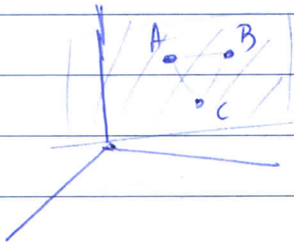
Για το (i): "$\subseteq$" προφανές

"$\supseteq$": $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in span(S)$ $\quad x = \overbrace{(1 - \sum \lambda_i)}^{\lambda_0} \underbrace{0}_{\in S} + \sum \lambda_i x_i \in aff(S)$

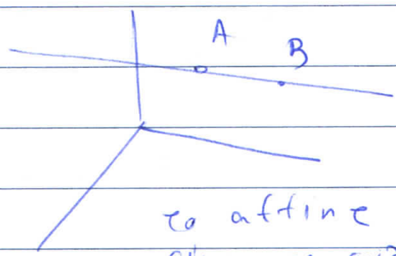
A = affine υπόχωρος $\Leftrightarrow A = aff(A)$

(Ορσ) $aff(A) = \cap \{B = \text{aff υποχ. } B \supseteq S\}$

Π.χ.



το affine είναι το επίπεδο που ορίζουν.



το affine είναι η ευθεία που ορίζουν.

Πρόταση: $A = L + x$ affine υπόχωρος ΤΕΕΙ

i) $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subseteq L$ γραμ. ανεξ.

ii) $\{a, a+y_1, \dots, a+y_k\} \subseteq A$ affine ανεξ.

Απόδειξη: i) $\Rightarrow$ ii): $\lambda_0 a + \lambda_1(a+y_1) + \dots + \lambda_k(a+y_k) = 0$ $\quad \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$

$(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k) a + \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. και $\lambda_0 = 0$

άρα ισχύει το ii)

ii) $\Rightarrow$ i): $\mu_1 y_1 + \dots + \mu_k y_k = 0$

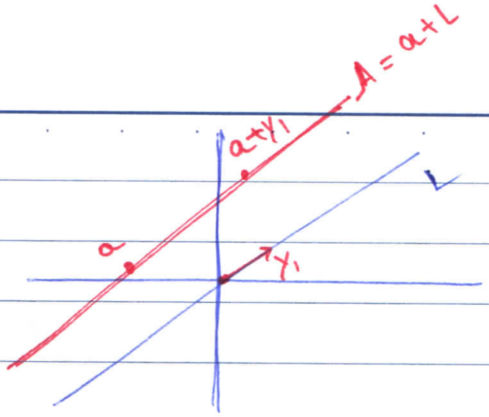
$\underbrace{(-\mu_1 - \mu_2 - \dots - \mu_k)}\, a + \mu_1(y_1 + a) + \dots + \mu_k(y_k + a) = 0$

$\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_k = 0$ $\quad$ από ii) $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_k = 0$.

άρα ισχύει το i)

Πόρισμα 1. A affine υπόχωρος. Τ.Ε.Ε.Ι

i) $\dim A = k$ | ii) $\exists \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subseteq A$ affine ανεξάρτητο και $\{z_0, z_1, \dots, z_m\} \subseteq A$ $m \geq k+1$ είναι affine εξαρτημένο



• **Πόρισμα 2:** $S \neq \emptyset$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, ΤΕΕΙ:

i) $\dim(\operatorname{aff} S) = k$

ii) $\exists$ουν $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subseteq S$ affine ανεξάρτητα και $\{z_0, \dots, z_m\} \subseteq S$ με $m \geq k+1$ είναι affine εξαρτημένα

Απόδειξη: $s \in S$, $0 \in S - s$ $\operatorname{aff}(S-s) = \operatorname{span}(S-s)$ γρ. υπόχωρος

$\{y_1 - s, y_2 - s, \dots, y_k - s\} \subseteq S-s$ $\exists$ γραμ. ανεξάρτητα

$\{z_1 - s, z_2 - s, \dots, z_m - s\} \subseteq S-s$ $m \geq k+1$ γραμ. εξαρτημένο

Τότε $\{s, y_1, \dots, y_k\} \subseteq S$ affine ανεξάρτητα

$\{s, z_1, \dots, z_m\} \subseteq S$ $m \geq k+1$ affine εξαρτημένα

2. Διάσταση κυρτού συνόλου - Τοπολογικές ιδιότητες κυρτού συνόλου

Ορισμός: Διάσταση κυρτού συνόλου

$K \neq \emptyset$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim K = \dim(\operatorname{aff} K)$

$\dim(K) = \dim(K + x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

ΑΣΚΗΣΗ: $\operatorname{aff} K = \operatorname{aff} \bar{K}$ και άρα $\dim K = \dim \bar{K}$ όταν K κυρτό $\neq \emptyset$.

Λύση: • $K \subseteq \bar{K} \Rightarrow \operatorname{aff}(K) \subseteq \operatorname{aff}(\bar{K})$

• $K \subseteq \operatorname{aff}(K)$ = κλειστός affine χώρος (*) $(f^{-1}(\{c\}))$

άρα $\bar{K} \subseteq \overline{\operatorname{aff}(K)} = \operatorname{aff}(K) \Rightarrow$

$\operatorname{aff}(\bar{K}) \subseteq \operatorname{aff}(K)$ Άρα $\operatorname{aff}(K) = \operatorname{aff}(\bar{K})$

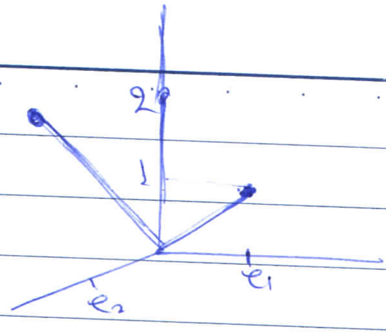
(*) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ~~γραμμική~~ $x = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n \Rightarrow f(x) = x_1 f(\bar{e}_1) + \dots + x_n f(\bar{e}_n) \Rightarrow$

$|f(x)| \leq \|x\| \cdot \underbrace{\|(f(e_1), \dots, f(e_n))\|}_{M} \iff |f(x)| \leq M \cdot \|x\|$

Lipschitz συνεχής

Τ.Ε.Ε.Ι :

$\begin{cases} \dim X < +\infty \\ T : X \to \mathbb{R} \text{ γραμ} \end{cases}$ $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ χώρος με νόρμα. $\Rightarrow$ T συνεχής (φραγμένος)



(K=) Έστω $\dim X = +\infty$

$\exists\, e_1 \neq 0$ ορίζουμε $T(e_1) = 1$

$\exists\, e_2 :$ $\{e_1, e_2\}$ γραμ ανεξ. $T(e_2) = 2$

$\vdots$

$\exists\, e_n :$ $\{e_1, .., e_n\}$ γραμ. ανεξ $T(e_n) = n$.

Έστω $x \in \operatorname{span}\{e_1, .., e_n, ..\}$ τότε $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_{j_i}$

και $T(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i T(e_{j_i})$

$|T(e_n)| \leq M \|e_n\|$ $n = 1, ..$

$n \leq M$ $n = 1, ..$

$\begin{Bmatrix} L \text{ γρ. χώρος στον } \mathbb{R}^m \\ L = \text{κλειστός} \end{Bmatrix} \Longleftarrow$ $\dim L = k$

$\{x_1, x_2, .., x_k\}$ βάση στον L

$L \ni x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ λ_i μονοσήμαντα ορισμένα

$(x_n) \in L$ ακολουθία $x_\nu = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^\nu x_i \to y_0$

$(\lambda_i^\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ ~~φραγμένες~~ $(\cdot\, x_i)$

Bolzano-Weirstrass βρίσκω κοινή $\lambda_i^{\nu_j} \to \gamma_i$

$x_{\nu_j} \to \underbrace{\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_k x_k}_{y_0} \in L$

• **ΠΡΟΤΑΣΗ. Βαρυκεντρικές Συντεταγμένες**

$K \neq \emptyset$, κυρτό, $\dim K = k$. τότε

i) $\exists\, V = \{x_0, x_1, .., x_k\} \subseteq K$ affine ανεξάρτητο

ii) Αν $x \in \operatorname{aff} K$ τότε υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένοι $t_i \in \mathbb{R}$ με $t_0 + t_1 + \dots + t_k = 1$ και $x = \sum_{i=0}^{k} t_i x_i$

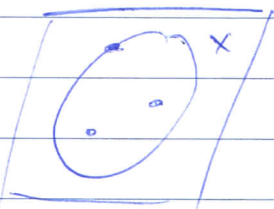
Τα $(t_0, t_1, .., t_k)$ καλούνται βαρυκεντρικές συντ. του x ως προς V

$\exists\, V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subseteq K$ affine αν. (Πόρισμα 2)

Απόδειξη: i) $\dim K = k = \dim(\mathrm{aff}\, V)$ (Πόρισμα 2)

ii) $x \in \mathrm{aff}\, K$

$x - x_0 \in \mathrm{aff}\, K - x_0$ $\quad \mathrm{aff}\, K - x_0$ $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_k - x_0\}$ γρ. ανεξάρτητα



άρα $\exists$ ουν μοναδικά ορισμένοι $t_i \in \mathbb{R}$ τ.ω.:

$$x - x_0 = t_1(x_1 - x_0) + \dots + t_k(x_k - x_0)$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{[1 - (t_1 + \dots + t_k)]}_{t_0} x_0 + t_1 x_1 + \dots + t_k x_k$$

• **Ορισμός: k-simplex**

$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ affine ανεξάρτητο

$\Delta_k = \mathrm{conv}(V)$ (ή Δ)

Σημ: $\dim \Delta_k = k$

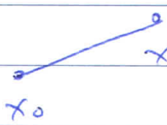
$V \subseteq \mathrm{conv}(V) = \Delta \subseteq \mathrm{aff}(V) \Rightarrow$

$\mathrm{aff}(V) \subseteq \mathrm{aff}(\Delta) \subseteq \mathrm{aff}(V) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{aff}(\Delta) = \mathrm{aff}(V) \\ \dim(\mathrm{aff}(V)) = k \end{array}\right\} \Rightarrow \dim(\mathrm{aff}(\Delta)) = k$$

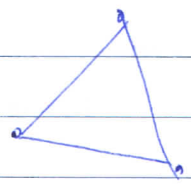
k-simplex.

$V = \{x_0, x_1\}$



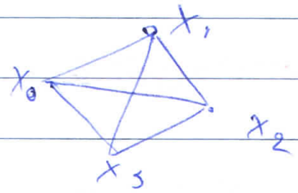
1-simplex

$V = \{x_0, x_1, x_2\}$



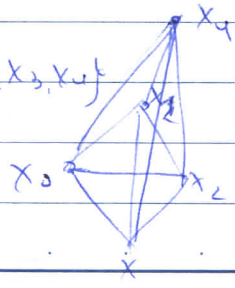
2-simplex

$V = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$



3-simplex

$V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$



4-simplex

Αν $x \in \mathrm{aff}\, \Delta$ ($\dim \mathrm{aff}(\Delta) = k$)

$\Rightarrow x = t_0 x_0 + \dots + t_k x_k$

$\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$

μοναδικά ορισμένα

• Σχετικό εσωτερικό, σύνορο

Ορισμός: $K \neq \emptyset$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$, K κυρτό

$x \in riK \iff \exists\ S_{affK}(x, \varepsilon) = S(x, \varepsilon) \cap affK \subseteq K$

σχετικό

εσωτερικό.

Σχετικό σύνορο: $\quad rbK = \bar{K} \setminus riK.$

! **ΛΗΜΜΑ:** $\Delta = con\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ k-simplex

Τότε $ri\Delta \neq \emptyset$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $f: Aff\Delta \to \mathbb{R}^{k+1}$ αν $x \in Aff\Delta = aff\{x_0, \ldots, x_k\}$

τότε υπάρχουν ! $t_i \in \mathbb{R}$: $x = t_0 x_0 + \ldots + t_k x_k$ $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$

(βαρυκεντρικές συντ. ως προς $V = \{x_0, \ldots, x_k\}$)

$f(x) = (t_0, t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ καλά ορισμένη στο $aff\Delta$

f συνεχής, $f(x) = (f_0(x), \ldots, f_k(x))$ $f_i(x) = t_i$ $i = 0, \ldots, k$.

$z_0 = \frac{1}{k+1}(x_0 + x_1 + \ldots + x_k)$ βαρύκεντρο

$\in convV = \Delta$ $\left(\sum_{i=1} \frac{1}{k+1} = 1\right.$

$f_i(z_0) = \frac{1}{k+1} > 0$ συνεχής

$f_i: aff\Delta \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$\exists\ S_{aff\Delta}(z_0, \varepsilon) \subseteq aff\Delta$ τέτοια ώστε

αν $x \in S_{aff\Delta}(z_0, \varepsilon) = S(z_0, \varepsilon) \cap Aff\Delta$ τότε $f_i(x) = t_i > 0$

$t_0 + \ldots + t_k = 1$

δηλ. αν $x \in S_{aff\Delta}(z_0, \varepsilon) \Rightarrow x \in \Delta$ άρα $z_0 \in S_{aff\Delta}(z_0, \varepsilon)$

$\subseteq \Delta$

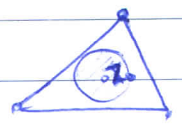
$z_0 \in ri\Delta$.

$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ affine ανεξάρτητο, $\mathbb{R}^n$

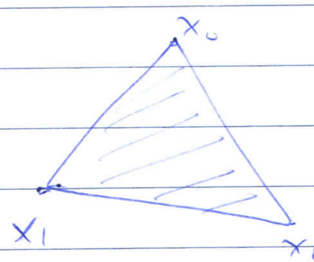
$\Delta_k = \operatorname{conv}\{x_0, \dots, x_k\}$ $\quad \dim \Delta_k = k$

k-simplex

Δ_k, $\quad ri\,\Delta_k \neq \emptyset$



Άσκηση: $K_1 \subseteq K_2$ κυρτά $\neq \emptyset$ ισχύει ότι $ri\,K_1 \subseteq ri\,K_2$;



$K_1 = [x_1, x_2] \subseteq K_2 = \operatorname{conv}\{x_1, x_2, x_3\}$

$ri\,K_1 = (x, y)$ $\quad ri\,K_2 =$ εσωτερικό του K_2 (χωρίς πλευρές)

ΘΕΩΡΗΜΑ: $K \neq \emptyset$ κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^n$ τότε $ri\,K \neq \emptyset$.

Απόδειξη: Έστω $\dim K = k$

άρα $\exists$ αν $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} = V \subseteq K$: $\dim(\operatorname{aff} V) = \dim(\operatorname{aff}(K)) = k$

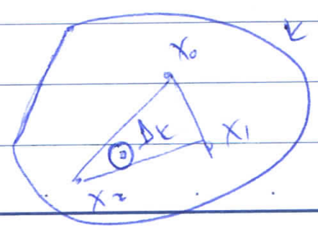
(Πόρισμα 2)

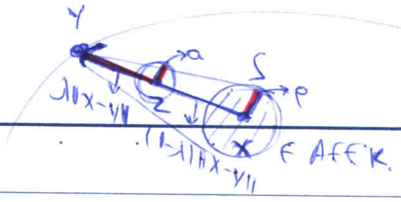
Δ_k η κυρτή $\Delta_k = \operatorname{conv} V \subseteq K$. $\quad$ ($\operatorname{aff} V \subseteq \operatorname{aff} K$, $\dim \operatorname{aff} V = \dim \operatorname{aff} K$ υπόχωροι)

$\operatorname{aff}(\Delta_k) = \operatorname{aff} K$

$$\exists z_0 \in ri\,\Delta_k \Rightarrow \exists \underbrace{S_{\operatorname{aff} \Delta_k}}_{= S_{\operatorname{aff} K}}(z_0, \varepsilon) \subseteq \Delta_k \subseteq K$$

Άρα $z_0 \in ri\,K$





• **ΛΗΜΜΑ** (σημαντικό)

K κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in ri K$, $y \in \bar{K}$ τότε $[x,y) \subseteq ri K$.

• **Απόδειξη:** $\dim(K) = \dim(K+x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

και $ri(K+x) = x + ri K$

$0 \in aff K$, $\dim K = m$

$z = (1-\lambda)y + \lambda x$ $\lambda \in (0,1)$ $(z \in (x,y))$

1η περίπτωση: $y \in K$ $x \in K^\circ$ $\exists \rho > 0$: $S(x,\rho) \subseteq K$ (1)

Από ομοιότητα $\quad \overset{\shortparallel}{x + S(0,\rho)}$

παίρνω $\frac{\lambda}{1} = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \lambda\rho$ $\quad S(z,\lambda\rho) = z + S(0,\lambda\rho) = z + \lambda S(0,\rho)$

Θα αποδείξουμε ότι $S(z,\lambda\rho) \subseteq K$ οπότε $z \in K^\circ$

Έστω $\omega \in z + \lambda S(0,\rho)$ τότε $\omega = z + \lambda \cdot v$ με $v \in S(0,\rho)$

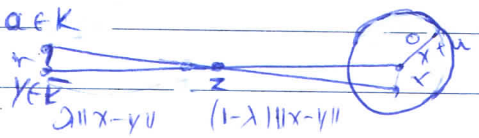
$\omega = [(1-\lambda)y + \lambda x] + \lambda v = (1-\lambda)y + \lambda(x+v)$

$\begin{cases} y \in K \\ x+v \in x + S(0,\rho) = S(x,\rho) \overset{(1)}{\subseteq} K \end{cases}$

Άρα $\omega \in K$ (= κυρτό). Άρα $S(z,\lambda\rho) \subseteq K$

φαντ! δηλαδή $z \in K^\circ$

2η περίπτωση: $y \in \bar{K} \setminus K$ $x \in K^\circ$ $\exists \rho$: $S(x,\rho) \subseteq K$



$S\left(y, \frac{\lambda}{1-\lambda}\rho\right)$ $\quad$ (όμοια τρίγωνα $\frac{r}{\lambda} = \frac{\rho}{1-\lambda} \Rightarrow r = \rho \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda}$)

$S\left(y, \frac{\lambda}{1-\lambda}\rho\right) \cap K \neq \emptyset$ $(y \in \bar{K})$

Παίρνουμε $a \in S\left(y, \frac{\lambda}{1-\lambda}\rho\right) = y + \frac{\lambda}{1-\lambda} S(0,\rho)$, $a \in K$

άρα $a = y + \frac{\lambda}{1-\lambda} u$, $u \in S(0,\rho)$

$z = (1-\lambda)y + \lambda x = (1-\lambda)\left(a - \frac{\lambda}{1-\lambda} u\right) + \lambda x = (1-\lambda)a + \lambda(x-u)$

$u \in S(0,\rho) \Rightarrow -u \in S(0,\rho) \Rightarrow x-u \in S(x,\rho) \subseteq K$ άρα

$z = (1-\lambda)\underset{K}{\underset{\Uparrow}{a}} + \lambda(x-y) \in K$ (= κυρτό), δηλ. $(y,x] \subseteq K$.

Έστω $z' \in (y,x] \Rightarrow z' \in K$, $x \in K^\circ \overset{1η\ περ}{\Longrightarrow} (z',x] \subseteq K^\circ$. Τελικά

$(y,x] \subseteq K^\circ$

ΠΟΡΙΣΜΑ 1: K κυρτό $\Rightarrow$ $ri\, K, \bar{K}$ είναι κυρτά.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2: $A \subseteq \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ τότε

(i) $conv(\bar{A}) \subseteq \overline{conv(A)}$

(ii) A φραγμένο $\Rightarrow$ $conv(\bar{A}) = \overline{conv(A)}$ (+ αντιπ. x)

Απόδειξη: (i) $A \subseteq conv(A) \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{conv(A)}$: κυρτό άρα

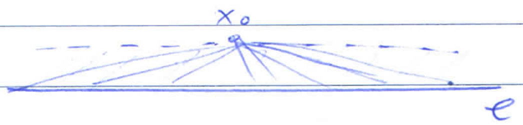
$conv(\bar{A}) \subseteq \overline{conv(A)}$

(ii) A φραγμένο $\bar{A}$ = φραγμένο + κλειστό $\overset{\mathbb{R}^n}{=}$ συμπαγές

Πορ. Θ. Καρ $\Rightarrow$ $con(\bar{A})$ = συμπαγές $\Rightarrow$ $con(\bar{A})$ = κλειστό

$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow con\, A \subseteq con(\bar{A}) \Rightarrow \overline{con\, A} \subseteq \overline{con(\bar{A})} = con(\bar{A})$.

ΑΣΚΗΣΗ: B = κλειστό $\overset{?}{\Rightarrow}$ $con\, B$ = κλειστό;



$B = e \cup \{x_0\}$ κλειστό

$con\, B$ δεν είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}^2$

άρα το φραγμένο δεν μπορεί να παραλειφθεί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β'

1) $S = con\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ k-simplex (αφινικά ανεξάρτητα)

Έστω $x \in aff\, S$ τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) $x \in ri\, S$

(ii) $\exists!$ affine συνδυασμός ώστε $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i$, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$

2) $P = con\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ πολύτοπο

Τ.Ε.Ε.Ι:

(i) $x \in ri\, P$

(ii) $\exists$ουν $\lambda_i > 0$ $\sum \lambda_i = 1$ $x = \sum \lambda_i x_i$ (όχι μονοσήμαντα ορισμένο όπως πριν)

3) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό $aff(K) = aff(\bar{K}) = aff(ri\, K)$

$ri\, K = ri\, \bar{K} = ri\,(ri\, K)$, $\bar{K} = \overline{ri\, K}$

$rb\,(K) = rb\,(\bar{K}) = rb\,(ri\, K)$

↓

σχετικό σύνορο

4) K, M κυρτά $ri(K+M) = ri(K) + ri\,M$

5) K_1, K_2 κυρτά $ri(K_1)\cap ri(K_2) \neq \emptyset \Rightarrow ri(K_1\cap K_2) = ri(K_1)\cap ri(K_2)$

Ισχύει για τυχαία K_1, K_2 κυρτά; ($K_1=\emptyset$

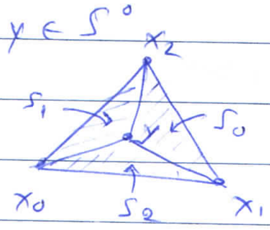
6) $\{K_i : i\in I\}$ κυρτά $\bigcap_{i\in I} ri(K_i) \neq\emptyset$. Τότε $\overline{\bigcap_{i\in I} K_i} = \bigcap_{i\in I}\overline{K_i}$

7) $S = conv\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ n-simplex στον $\mathbb{R}^n$ και $y\in S^\circ$

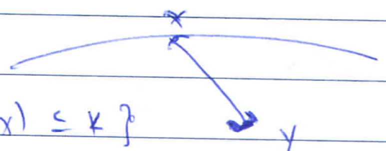
Έστω $S_i = conv\{x_0,x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n\}$

Τότε τα S_i είναι n-simplex

$i\neq j$ $S_i^\circ\cap S_j^\circ=\emptyset$ $S=S_0\cup\dots\cup S_n$



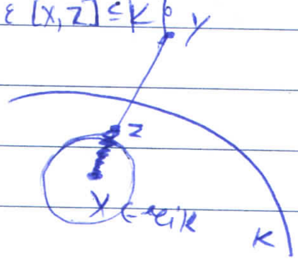
ΘΕΩΡΗΜΑ: K κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^n$



(i) $\overline{K} = \{x\in aff K : \exists y\in K$ ώστε $[y,x)\subseteq K\}$

★ (ii) $ri K = \{x\in aff K : \forall y\in aff K-\{x\}\ \exists z\in(x,y)$ ώστε $[x,z]\subseteq K\}$

Απόδειξη: (i) $A=\{x\in aff : \exists y\in K$ με $[y,x)\subseteq K\}$



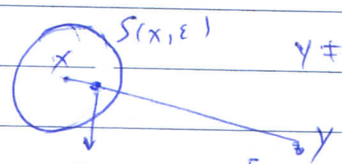
∘ $x\in A$ $\exists y\in K : [y,x)\subseteq K \Rightarrow \overline{[y,x)}\subseteq\overline{K}$

$\Rightarrow [y,x]\subseteq \overline{K} \Rightarrow x\in\overline{K}$ άρα $A\subseteq\overline{K}$

∘ $x\in\overline{K}$ έστω $y_0\in ri K$ τότε $(x,y_0]\subseteq ri K\subseteq K$ άρα $x\in A$

(ii) $B=\{x\in aff K : \forall y\in aff K-\{x\}\ \exists z\in(x,y)$ ώστε $[x,z]\subseteq K\}$

∘ $x\in ri K$ $S_{aff K}(x,\epsilon)\subseteq K$



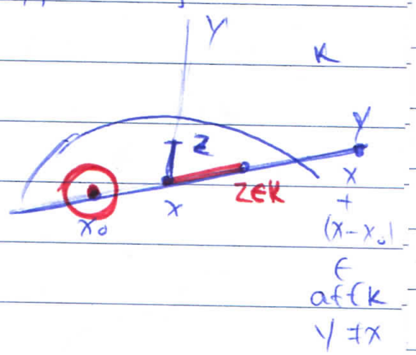
$y\neq x$

$z\in(x,y)$ $[x,z]\subseteq K$

$z = x+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{(y-x)}{\|y-x\|}$

∘ $x\in B$, $x_0\in ri K$

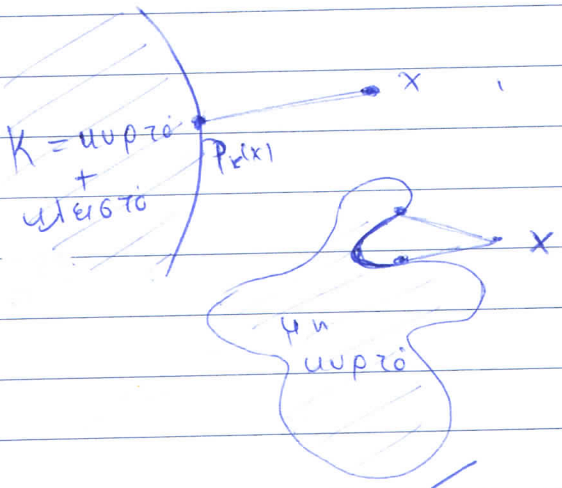
$z\in K\subseteq\overline{K}$, $x_0\in ri K$ | $x\in(x_0,z)\subseteq ri K$ (Λήμμα)

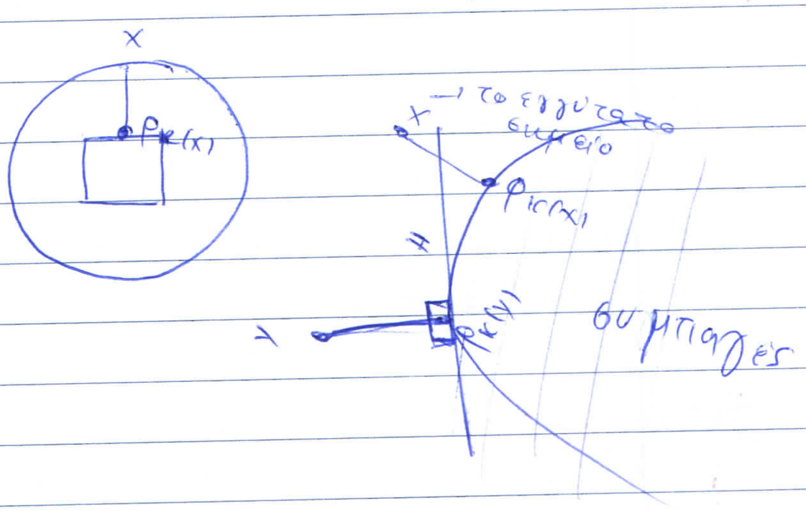


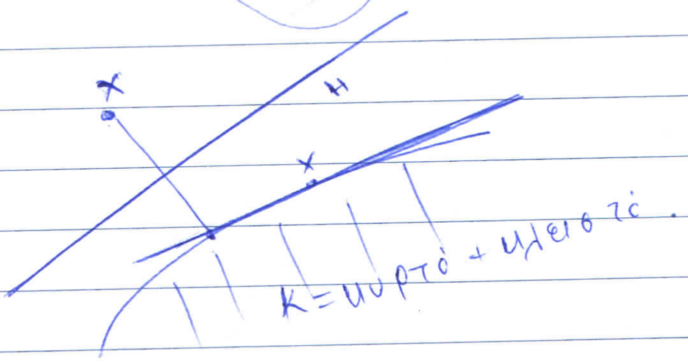
Μετρική προβολή

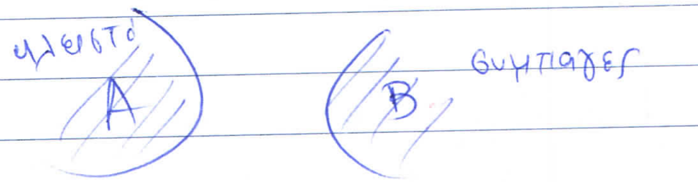
3. Επίπεδα στήριξης, διαχωριστικά θεωρήματα. στον $\mathbb{R}^n$

$d(x, K) = \inf\{d(x,a) : a \in K\} = \|x-a\|$







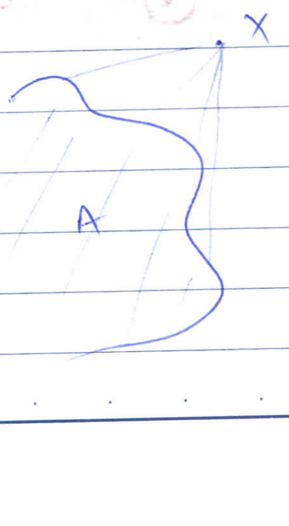


αρκεί να διαχωρίσω τα 0, $A-B$
αλλά αυτό γίνεται από το
προηγούμενο

Υπενθύμιση:

$A \neq \emptyset \quad A \subseteq \mathbb{R}^n \quad x \in \mathbb{R}^n$

$d(x, A) = \inf\{\|x-a\| \; a \in A\} \geq 0 \; (\in \mathbb{R})$



Χρήσιμες ιδιότητες:

1) $d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$

άρα $d(x, A) = d(x, \bar{A})$

2) Αν $B = \bar{B}$ τότε $d(x, B) \iff x \in B$.

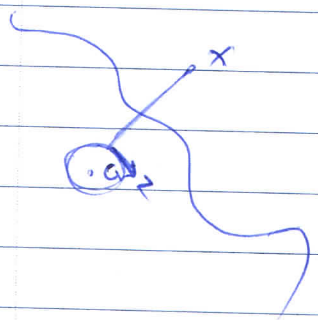
3) $\exists\, a \in \bar{A} : d(x, A) = \|x-a\|$

$\exists\, a_n \in A : \|x-a_n\| \to d(x, A) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και άρα $\exists\, a_{k_n} \in A$
$\to a \in \bar{A}$

$\|x-a_{k_n}\| \to d(x,A)$ και $\|x-a_{k_n}\| \to \|x-a\|$ άρα
$d(x,A) = \|x-a\|$, $a \in \bar{A}$.

4) $x \notin A$ $(d(x,A)>0)$ τότε $\exists\, a \in \text{bd}A : d(x,A) = \|x-a\|$



$(3) \Rightarrow \exists\, a \in \bar{A} = A^{\circ} \cup \text{bd}A$

Έστω $a \in A^{\circ}$ $\exists\, S(a,\varepsilon) \subseteq A$ και $0 < \varepsilon < \|x-a\|$

Παίρνω $z = a + \frac{\varepsilon}{2} \frac{(x-a)}{\|x-a\|} \in S(a,\varepsilon)$ επομένως $z \in A$

$\|x-z\| = \left\| x-a-\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{x-a}{\|x-a\|} \right\| = \left(1-\frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}\right)\underbrace{\|x-a\|}_{d(x,A)}$

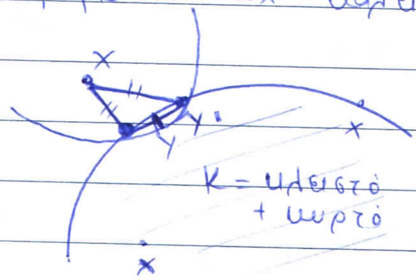
άτοπο. Άρα $a \in \text{bd}A$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ μη κενό κυρτό + κλειστό. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα $a_x \in K$ τ.ώ: $d(x,K) = \|x-a_x\|$

$a_x \overset{συμβ}{=} p_K(x)$ και ονομάζεται εγγύτατο σημείο του x ως προς το σύνολο K.

Η $p_K : \mathbb{R}^n \to K$, $p_K(x) = a_x$ καλείται μετρική προβολή του K

Απόδειξη:

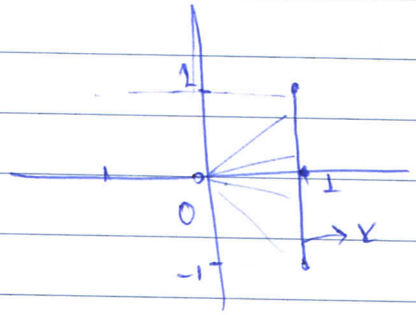


- Αν $x \in K$ τότε $p_K(x) = x$ αφού τότε $d(x,K) = \|x-x\| = 0$ και είναι μοναδικό
- Έστω $x \notin K$ τότε (ιδιότητα (2)) θα υπάρχει $y \in K (=E)$ ώστε:
  $\|x-y\| = d(x,K) > 0$ (αφού $x \notin K$)
  Έστω $y' \in K$, $y' \neq y$, $\|x-y\| = \|x-y'\| = d(x,K) > 0$
  Τότε το τρίγωνο που σχηματίζεται από τα x, y, y' είναι ισοσκελές και $\frac{1}{2}(y+y') \in K$ αφού είναι κυρτό. Το σύνορο της $S(x,c)$ δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα, δηλ. $\|x-\underbrace{\tfrac{1}{2}(x+x')}_{\in K}\| < \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\|x-y'\| = c = d(x,K)$, άτοπο.

από Cauchy-Swartz

Άρα το y είναι μοναδικό.

$\mathbb{R}^2$ $\quad \|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|\}$

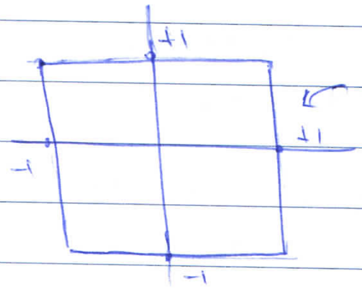


$d((0,0), K) = 1$

$\|$

$\|(0,0) - (x,y)\| = 1 \quad \forall \; x,y \in K$

γιατί η νόρμα δεν είναι ευκλείδεια



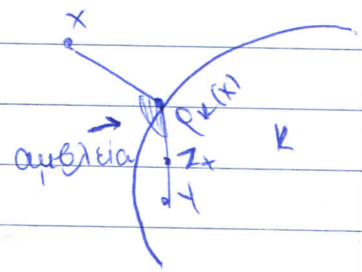
∞-νόρμα
περιέχει ευθύγραμμα τμήματα

Πρέπει να προέρχεται από Cauchy-Swartz

ΛΗΜΜΑ: (Χρησιμότατο)

$K \neq \emptyset$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$, κυρτό και κλειστό

$x \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\langle x - p_K(x), y - p_K(x) \rangle \leq 0$



Απόδειξη: $x \notin K$, $y \neq p_K(x)$

Θεωρούμε $z_t = p_K(x) + t(y - p_K(x))$ για $0 < t < 1$ άρα $z_t \in K$

$$\|x - z_t\|^2 \geq \|x - p_K(x)\|^2$$

$$\|x - p_K(x) - t(y - p_K(x))\|^2 \geq \|x - p_K(x)\|^2 \iff$$

$$t^2 \|y - p_K(x)\|^2 - 2t \langle x - p_K(x), y - p_K(x) \rangle \geq 0 \iff$$

$$\frac{t \|y - p_K(x)\|^2}{2} \geq \langle x - p_K(x), y - p_K(x) \rangle$$

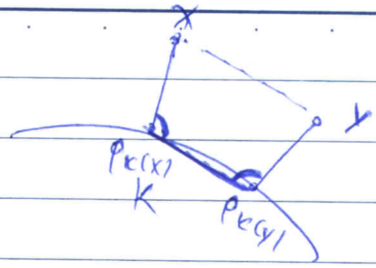
Άρα $\langle x - p_K(x), y - p_K(x) \rangle \leq 0$ για $t \to 0^+$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Buseman – Feller 1935)

K κυρτό + κλειστό, $\neq \emptyset$, $\subseteq \mathbb{R}^n$

Τότε $\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\|$ $x, y \in \mathbb{R}$.

Δηλ. η p_K είναι Lipschitz συνεχής



Απόδειξη: $u = p_K(x) \in K$ $v = p_K(y) \in K$

$\langle x - u, v - u \rangle \leq 0$ και $\langle y - v, u - v \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle y - v, v - u \rangle \geq 0$

άρα $\langle x - u, v - u \rangle - \langle y - v, v - u \rangle \leq 0 \iff$

$\langle (x - y) + (v - u), v - u \rangle \leq 0 \iff$

$\|-v + u\|^2 \leq \langle x - y, u - v \rangle \overset{C-S}{\leq} \|x - y\| \cdot \|u - v\| \Rightarrow$

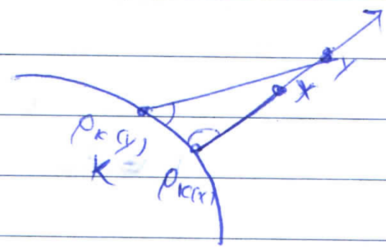
$\|u - v\| \leq \|x - y\|$.

ΛΗΜΜΑ: Έστω $x \notin K$ (= κλειστό + κυρτό)

$\ell = \{p_K(x) + t(x - p_K(x)),\ t \geq 0\}$

ημιευθεία όπως στο σχήμα

Τότε $\forall y \in \ell$, $p_K(y) = p_K(x)$.



Απόδειξη: Έστω $y \in \ell$ $y = p_K(x) + t(x - p_K(x))$ για κάποιο $t \geq 0$.

$\langle y - p_K(y), p_K(x) - p_K(y) \rangle \leq 0 \iff$

$\langle p_K(x) + tx - t p_K(x) - p_K(y), p_K(x) - p_K(y) \rangle \leq 0$

$\|p_K(x) - p_K(y)\|^2 + t \underbrace{\langle x - p_K(x), p_K(x) - p_K(y) \rangle}_{\geq 0 \text{ από λήμμα}} \leq 0$ $t \geq 0$

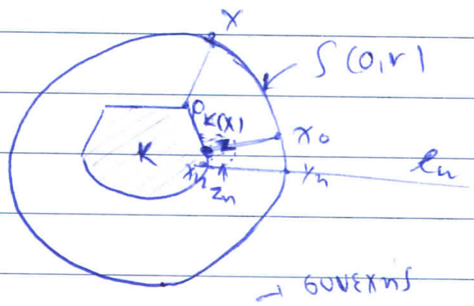
άρα $p_K(x) = p_K(y)$

ΘΕΩΡΗΜΑ: K κυρτό + κλειστό + φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}^n$ άρα συμπαγές, $\text{εσ}K \neq \emptyset$

$K \subseteq S(0,r)$ ανοιχτή

Τότε $p_K(\mathrm{bd}\, S(0,r)) = \mathrm{bd}\, K$

$p_K : \mathrm{bd}\, S(0,r) \to \mathrm{bd}\, K$ επί



Απόδειξη: $\mathrm{bd}\, S(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$

$p_K(\mathrm{bd}\, S(0,r)) \subseteq \mathrm{bd}\, K$ (ιδ 4)

Έστω $z \in \mathrm{bd}\, K$ θα υπάρχουν $z_n \notin K$ $z_n \in S(0,r)$ $x_n = p_K(z_n)$ $z_n \to z$ $\to$ συνεχής

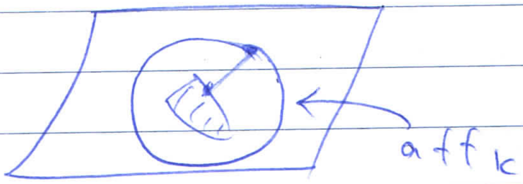
$x_n \to p_K(z)$ αφού p_K Lip-συνεχής. Παίρνω τις $\ell_n = \{p_K(z_n) + t(z_n - p_K(z_n)),\ t \geq 0\}$

Έχουν $y_n \in \ell_n$ και $\|y_n\| = r$

$\exists\ y_{n_k} \to x_0 \quad \|x_0\| = r \quad (B-W)$

$$\left.\begin{array}{l} p(y_{n_k}) = p(z_{n_k}) = x_{n_k} \to z \\ \text{και } p \text{ συνεχή} \quad p(y_{n_k}) \to p(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow z = p(x_0)$$

Γενικότερα: Αν K κυρτό, $\dim K = k$ κλειστό + φραγμένο
Το ίδιο ισχύει για το $\text{aff}\,K$.

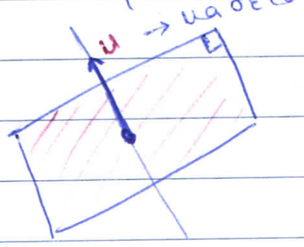


4) Υπερεπίπεδα στήριξης, Διαχωριστικά θεωρήματα

$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle = c\}$, $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$

$H = x_0 + L$, $L = \{y : \langle y, u\rangle = 0\}$ = γραμ. υπόχωρος.

$\mathbb{R}^n = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\} \oplus L$



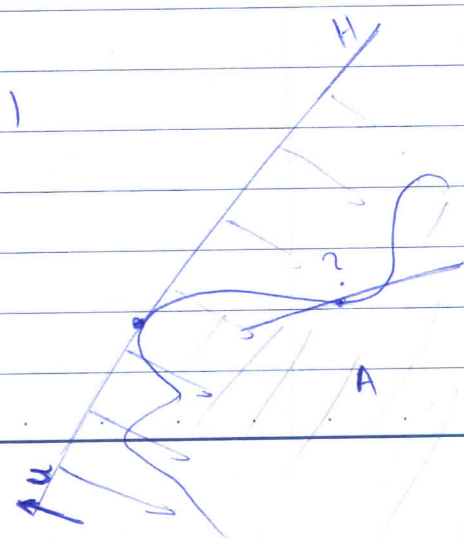
$\dim H = \dim L = n-1$

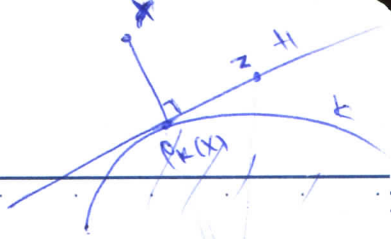
Το υπερεπίπεδο είναι οποιοσδήποτε affine υπόχωρος με συνδιάσταση 1.

Ορισμός: (Υπερεπίπεδα στήριξης, Φέροντα υπερεπίπεδα)
$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\emptyset \neq A$, $H^{(u,c)}$ υπερεπίπεδο. Το H είναι ένα υπερεπίπεδο στήριξης του A $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} A \cap H \neq \emptyset \\ A \subseteq H^- \ (\text{ή } A \subseteq H^+) \end{cases}$

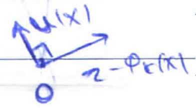
$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists\ x_0 \in A : \langle x_0, u\rangle = c \\ \forall x \in A,\ \langle x, u\rangle \leq c \quad (\text{ή } \langle x, u\rangle \geq c,\ x \in A) \end{cases}$

Εάν $A \subseteq H^-$ u = εξ κάθετο του A στο x_0:



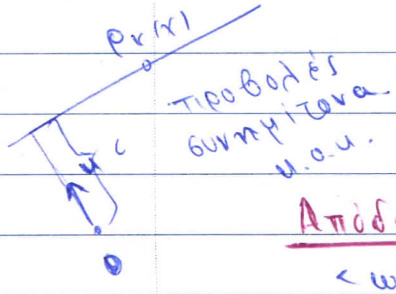


Λήμμα (Χρήσιμο): K = κυρτό + κλειστό, $x \notin K$



$$u(x) = \frac{x - p_K(x)}{\|x - p_K(x)\|}$$

$$H = \{ z \in \mathbb{R}^n : \langle z - p_K(x), u(x) \rangle = 0 \}$$
$$= \{ z \in \mathbb{R}^n : \langle z, u(x) \rangle = \underbrace{\langle p_K(x), u(x) \rangle}_{c} \}$$



Τότε το H είναι υπερεπίπεδο στήριξης του K στο $p_K(x)$.

Απόδειξη: $p_K(x) \in H \cap K$. Θεωρούμε $w \in K \overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$\langle w - p_K(x), x - p_K(x) \rangle \leq 0$

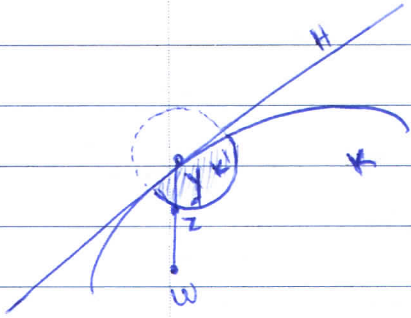
$\langle w, u \rangle - \langle p_K(x), u \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle w, u \rangle \leq \langle p_K(x), u \rangle$

Άρα $K \subseteq \overline{H^-}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: K = κλειστό + κυρτό και $y \in \mathrm{bd}K$ τότε $\exists$ H υπερεπίπεδο στήριξης του K με $y \in K \cap H$

Απόδειξη: **α')** K = φραγμένο, $K \subseteq S(0,r)$ τότε $\exists\, x : \|x\| = r$ και $p_K(x) = y$. Τότε το $H(u,c)$ = όπως ορίσαμε στο λήμμα είναι υπερεπίπεδο στήριξης του K στο $p_K(x) = y$.

β') K = τυχαίο. $K' = K \cap \hat{S}(y,1)$ = κλειστό + κυρτό + φραγμένο και $y \in \mathrm{bd}K'$. Τότε $\exists$ $H(u,c)$ (α' περ.)



$\langle y, u \rangle = c$, $\langle z, u \rangle \leq c$ $\quad z \in K'$

Αν $w \in K$ παίρνουμε $z = y + \frac{1}{\|w - y\|} \cdot (w - y) \in K'$
με $\|w - y\| > 1$ δηλ. $w \in K \setminus K'$ (κυρτός συνδυασμός)

$$\langle z, u \rangle \leq c \Rightarrow \underset{c}{\underset{\|}{\langle y, u \rangle}} + \frac{1}{\|w - y\|} \left(\langle w, u \rangle - \langle y, u \rangle \right) \leq c$$

$$\Rightarrow \langle w, u \rangle \leq \langle y, u \rangle = c$$

Άρα $\forall$ $z \in K$ $\langle z, u \rangle \leq c$ ✓ $z \in \overline{H^-}$.

$H(u,c) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c\}$ $(u \neq 0, c \in \mathbb{R})$

Ορισμοί:

1. $A, B \neq \emptyset$ $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ θα λέμε ότι το H διαχωρίζει τα A, B $\Leftrightarrow$ $A \subseteq \overline{H}^+$ και $B \subseteq \overline{H}^-$ (ή αντίστροφα)

$\Leftrightarrow$ $\langle x, u \rangle \leq c \leq \langle y, u \rangle$ $\forall x \in A, y \in B$ (ή αντίστροφα)

2. H διαχωρίζει γνήσια τα A, B $\Leftrightarrow$ $A \subseteq H^+$ και $B \subseteq H^-$ (ή αντίθετα)

$\Leftrightarrow$ $\langle x, u \rangle < c < \langle y, u \rangle$ $\forall x \in A, y \in B$ (ή αντίθετα)

3. H διαχωρίζει αυστηρά τα A, B $\Leftrightarrow$

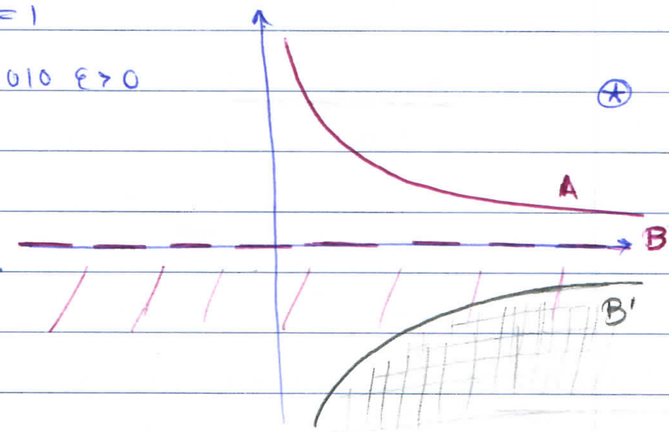
$H(u, c-\varepsilon)$, $H(u, c+\varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$

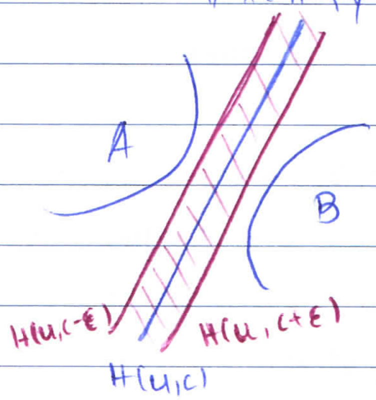
διαχωρίζουν τα A, B.

$\Leftrightarrow$ $\exists$ ουν $a, b \in \mathbb{R}$:

$\langle x, u \rangle \leq a < b \leq \langle y, u \rangle$

$\forall x \in A, y \in B$ (ή αντίθετα)





Λήμμα: $A, B \subseteq \mathbb{R}^n \neq \emptyset$, Τ.Ε.Ε.Ι.

(i) A, B διαχωρίζονται (διαχ. αυστηρά)

(ii) 0, $A-B$ διαχωρίζονται (διαχ. αυστηρά)

Απόδειξη: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\exists$ ουν $a, b \in \mathbb{R}$ και $u \neq 0$:

$\langle x, u \rangle \leq a < b \leq \langle y, u \rangle$ $\forall x \in A, y \in B$

$x - y \in A - B$ $\langle x-y, u \rangle \leq a - b < 0 \leq \langle 0, u \rangle$

άρα τα $A-B$ και $\{0\}$ διαχωρίζονται αυστηρά.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $A-B$, $\{0\}$ διαχωρίζονται αυστηρά:

$\exists a, b \in \mathbb{R}$, $u \neq 0$ $\langle x-y, u \rangle \leq a < b \leq \langle 0, u \rangle$ $x \in A, y \in B$

$\langle x, u \rangle \leq a + \langle y, u \rangle$, $\forall x \in A, y \in B$.

$s = \sup\{\langle x, u \rangle : x \in A\} \leq a + \inf\{\langle y, u \rangle : y \in B\} = a + t$ $\Leftrightarrow$

$\boxed{s \leq a + t}$

$\langle x, u \rangle \leq s \leq a + t < b + t \leq t \leq \langle y, u \rangle$ $x \in A, y \in B$.

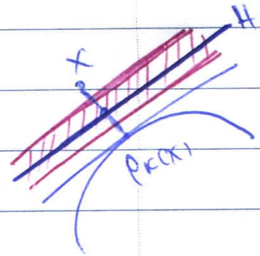
$\langle x, u \rangle \leq a + t < b + t \leq \langle y, u \rangle$!

ΘΕΩΡΗΜΑ: K = κυρτό, $x \notin K$.

(i) K, x διαχωρίζονται

(ii) K = κυρτό + κλειστό, τότε K, x διαχωρίζονται αυστηρά.

Απόδειξη: (ii) $x \notin K$ = κλειστό $H(u(x), c)$ (c του 1ου λήμματος)



$K \subseteq \overline{H^-}$, $x \notin H$

H_1 = περνά από το $\frac{x + P_K(x)}{2}$ $\quad H_1 \perp u(x)$

(i) • $x \notin \overline{K} \Rightarrow$ (ii) $\overline{K}, x$ διαχωρίζονται αυστηρά $\Rightarrow K, x$ διαχωρίζονται αυστηρά

• $x \in \overline{K} \setminus K = \text{bd}\, K$ $\quad \exists$ υπερεπίπεδο στήριξης του K στο x

ΑΣΚΗΣΗ: $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$

1) Να βρεθεί παράδειγμα A, B = κλειστά και το $A+B$ όχι κλειστό (A)

2) Αν A συμπαγές, B κλειστό τότε το $A+B$ είναι κλειστό

Λύση: 2) $a_n + b_n \in A + B$ $\quad a_n + b_n \to z$

$(a_n)_n \subseteq A$ συμπαγές $\Rightarrow \exists$ υπακ. $a_{k_n} \to a \in A$

άρα $b_{k_n} \to z - a \in B$ = κλειστό

Άρα $z = \underbrace{a}_{\in A} + \underbrace{(z-a)}_{\in B} \in A+B$

ΘΕΩΡΗΜΑ: A, B κυρτά, $A \cap B = \emptyset$

(i) Τα A, B διαχωρίζονται ($0 \notin A - B$, θεωρ.)

(ii) A = συμπ., B = κλειστό τότε διαχ. αυστηρά ($0 \notin A - B$ = κλειστό)

• **Ασκήσεις - Θεωρήματα**

1) $K \neq \emptyset$, $K \neq \mathbb{R}^n$ κυρτό και συμπαγές. Τότε $\forall\, u \in \mathbb{R}^n$ $\|u\| = 1$ $\exists\, H(u, c)$ υπερ. στήριξης του K

2) K κλειστό $\subseteq \mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ εσ $K \neq \emptyset$. Εάν $\forall\, y \in \text{bd}\, K$ $\exists\, H$ = υπερ. στήριξης Τότε K είναι κυρτό.