Άσκηση 7 (1)

Έστω $S = \text{con}\{x_0, \dots, x_n\}$ n-simplex στον $\mathbb{R}^n$ και $y \in S^\circ$. Τότε ορίζουμε $S_i = \text{con}\{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_i, \dots, x_n\}$. Κάθε S_i είναι n-simplex και $S_i^\circ \cap S_j^\circ = \emptyset$ $\forall\, i = 1, 2, \dots, n$. Επίσης $S = S_0 \cup \dots \cup S_n$.
$\forall\, i \neq j$.

Απόδειξη.

- Έστω $y \in S^\circ \to \exists\, a_0, \dots, a_n \in (0,1)$ ώστε

$\underline{y = a_0 x_0 + \dots + a_n x_n}$, $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$

Δδο $\forall\, i$ το S_i είναι n-simplex. Αρκεί τα $x_0, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n$ να είναι affine ανεξάρτητα.

Έστω $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ με $t_0 + \dots + t_n = 0$, τ.ω.

$t_0 x_0 + t_1 x_1 + \dots + t_{i-1} x_{i-1} + t_i \cancel{y} + \dots + t_n x_n = 0.$

Αντικαθιστώντας το y έχουμε

$t_0 x_0 + t_1 x_1 + \dots + t_{i-1} x_{i-1} + t_i \sum_{k=0}^{n} a_i x_i + t_{i+1} x_{i+1} + \dots + t_n x_n =$

δηλαδή $\sum_{j \neq i} (t_j + a_j t_i) x_j + t_i a_i x_i = 0$

Αφού τα $x_0, \dots, x_n$ affine ανεξάρτητα έπεται ότι $\forall\, j \neq i$ $t_j + a_j t_i = 0$ και $t_i a_i = 0$

Όμως $\alpha_0, \dots, \alpha_n \neq 0 \Rightarrow$ $t_j = 0$ $\forall\, j = 0, \dots, n.$

- $S_i^\circ \cap S_j^\circ = \emptyset$ για $i \neq j$

Έστω $x \in S_i^\circ \cap S_j^\circ \Rightarrow \exists\, t_k, s_k \in (0,1)$ ώστε

$\sum_{k=0}^{n} t_k = \sum_{k=0}^{n} s_k = 1$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$x = \sum_{k\neq i} t_k x_k + t_i y = \sum_{k\neq j} s_k x_k + s_j y$$

Άρα $\sum_{k\neq j,i} (t_k - s_k) x_k + t_j x_j - s_j y - s_i x_i + t_i y = 0$

Αντικαθιστώντας το y έχουμε

$$\sum_{k\neq j,i} (t_k - s_k) x_k + t_j x_j + (t_i - s_j)\sum_{k=0}^{n} a_k x_k + t_j x_j - s_i x_i = 0$$

$$\sum_{k\neq j,i} (t_k - s_k + (t_i - s_j) a_k) x_k + ((t_i - s_j) a_i - s_i) x_i + ((t_i - s_j) a_j + t_j) x_j = 0.$$

Τα $x_0, \dots, x_n$ είναι affine ανεξάρτητα άρα.

$$(t_i - s_j) a_i - s_i = (t_i - s_j) a_j + t_i = 0.$$

Αν $t_i - s_j \geq 0$ τότε $(t_i - s_j) a_j + t_i \geq t_i > 0$ άτοπο.

- Αν $t_i - s_j < 0$ πάλι οδηγούμαστε σ' άτοπο.

Άρα $S_i^{\circ} \cap S_j^{\circ} = \emptyset$ για $i \neq j$

$S = S_0 \cup \dots \cup S_n$.

Για κάθε S_i έχουμε ότι $y, x_j, j\neq i$ ανήκουν στο S και S κυρτό σύνολο, άρα $\operatorname{conv}\{x_0, \dots, y, \dots, x_n\} \subseteq S$.

$\Rightarrow$. $S_0 \cup \dots \cup S_n \subseteq S$.

Αντίστροφα έστω $x \in S$. Τότε $\exists$ $t_0, \dots, t_n \geq 0$, $\sum_{k=0} t_k = 1$

ώστε $x = \sum_{k=0}^{n} t_k x_k$.

$\exists$ $j \in \{0, \dots, n\}$ ώστε $\frac{t_j}{\alpha_j} = \min\{ \frac{t_k}{\alpha_k} : k = 0, \dots, n\}$

<u>Ιδέα</u> Ορίζουμε $s_k = t_k - \frac{t_j}{\alpha_j} \cdot a_k$, $k \neq j$ και $s_j = \frac{t_j}{\alpha_j}$

Τότε $\forall$ $\underset{k \neq j}{k = 0, \dots, n}$ ισχύει $\underset{k \neq j}{s_k} = a_k\left(\frac{t_k}{\alpha_k} - \frac{t_j}{\alpha_j}\right) \geq 0$

Επίσης $\sum_{k=0}^{n} s_k = \sum_{k \neq j} t_k - \frac{t_j}{\alpha_j} a_k + \frac{t_j}{\alpha_j} =$

$= \sum_{k \neq j} t_k - \frac{t_j}{\alpha_j} \sum_{k \neq j} \alpha_k + \frac{t_j}{\alpha_j} = 1 - \frac{t_j}{\alpha_j} - \frac{t_j}{\alpha_j}(1 - \alpha_j) + \frac{t_j}{\alpha_j} = 1$

Άρα $\sum_{k=0}^{n} s_k = 1$.

Επίσης $\sum_{k \neq j} s_k x_k + s_j y = \sum_{k \neq j} \left(t_k - \frac{t_j}{\alpha_j} \alpha_k\right) x_k + \frac{t_j}{\alpha_j} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k$.

$= \sum_{k \neq j} \left(t_k - \frac{t_j}{\alpha_j} a_k + \frac{t_j}{\alpha_j} a_k\right) x_k + t_j x_j =$

$= \sum_{k=0}^{n} t_k x_k = x \Rightarrow x \in S_j \subseteq S_0 \cup \dots \cup S_n$