Άσκηση 5

Αν K_1, K_2 κυρτά με $ri(K_1)\cap ri(K_2)\neq \emptyset$, τότε νδο
$ri(K_1\cap K_2) = ri(K_1)\cap ri(K_2)$.

Απόδειξη

$$x\in ri(K_1)\cap ri(K_2) \to \begin{cases} x\in ri(K_1) \\ \text{και} \\ x\in ri(K_2)\end{cases}$$

"$\supseteq$" Έστω $x\in ri(K_1)\cap ri(K_2)$.

Θεωρούμε τυχόν $y\in aff(K_1\cap K_2)$, $y\neq x$. Θα βρούμε $z\in(x,y)$ ώστε $[x,z]\subseteq K_1\cap K_2$ γιατί τότε $x\in ri(K_1\cap K_2)$.

• $aff(K_1\cap K_2)\subseteq aff(K_1)$ και $aff(K_1\cap K_2)\subseteq aff(K_2)$. Συνεπώς υπάρχει $z_1\in(x,y)$ ώστε $[x,z_1]\subseteq K_1$ και $z_2\in(x,y)$ ώστε $[x,z_2]\subseteq K_2$.

Άρα $y\in aff(K_1)$ και $y\in aff(K_2)$.

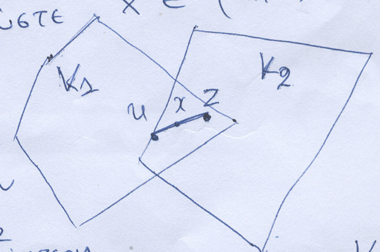
Τότε $\exists$ $t\in(0,1)$ ώστε $z_1=(1-t)x+ty$ και $s\in(0,1)$: $z_2=(1-s)x+sy$. Ορίζουμε $r=\min\{t,s\}$.

Τότε το στοιχείο $z=(1-r)x+ry$ έχει την ιδιότητα $[x,z]\subseteq[x,z_1]\subseteq K_1$ και $[x,z]\subseteq[x,z_2]\subseteq K_2$

δηλ $[x,z]\subseteq K_1\cap K_2 \Rightarrow x\in ri(K_1\cap K_2)$.

"$\subseteq$". Έστω $x\in ri(K_1\cap K_2)$, $z\in ri(K_1)\cap ri(K_2)$. Επειδή $z\in ri(K_1)\cap ri(K_2)\subseteq K_1\cap K_2$ και

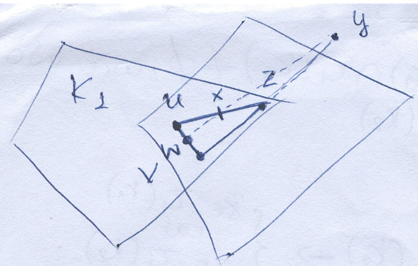
$x\in ri(K_1\cap K_2)$ $\exists$ $u\in K_1\cap K_2$ ώστε $x\in(u,z)$ γιατί το $K_1\cap K_2$ κυρτό.



Τώρα, θεωρούμε $y\in aff(K_1)$, και υποθέτουμε ότι το y δεν ανήκει στην ευθεία των u,x,z αλλιώς η δουλειά είναι απλούστερη.

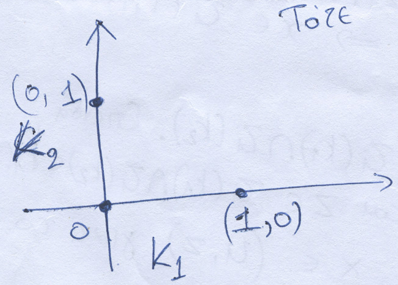
Επειδή $y\in aff(K_1)$ και $z\in ri(K_1)$ $\exists$ $v\in K_1$ ώστε

από το θεώρημα → $\boxed{z\in(v,y)}$ Τότε το x είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου uvy



Τότε $\exists\ w \in (u,v)$ ώστε $x \in (y,w)$. Έπεται ότι
επειδή $u,v \in K_1$, $w \in K_1$.
Δηλαδή $\forall\ y \in \mathrm{aff}(K_1)$ βρήκαμε $w \in K_1$ ώστε
$x \in (y,w) \Longrightarrow x \in ri(K_1)$. Όμοια δείχνουμε
ότι $x \in ri(K_2) \Rightarrow ri(K_1 \cap K_2) = ri(K_1) \cap ri(K_2)$.

<u>Αντιπαράδειγμα</u>



Τότε $ri(K_1 \cap K_2) = \{(0,0)\}$.
$ri(K_1) \cap ri(K_2) = \emptyset$.