Άσκηση 1 – Θεώρημα

Έστω $a_0 \in A$, A = κυρτό, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Τα εξής είναι ισοδύναμα

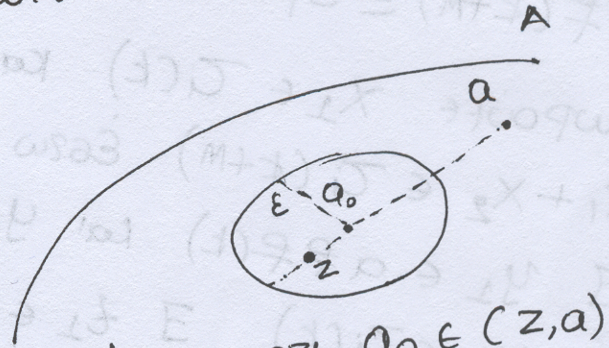
(α) $a_0 \in ri(A)$

(β) $\forall\, a \in A$, υπάρχει $\mu > 1$ ώστε $(1-\mu)\cdot a + \mu \cdot a_0 \in A$

Απόδειξη

(α) ⇒ (β) Έστω $a_0 \in ri(A)$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε

$B_{affA}(a_0, \epsilon) \subseteq A$



Θεωρούμε $a \in A$

Ιδέα Ορίζουμε $z = a_0 + \dfrac{\epsilon(a_0 - a)}{2\|a_0 - a\|}$

Τότε $z \in B_{affA}(a_0, \epsilon)$. Από το λήμμα έπεται ότι $a_0 \in (z, a)$

δηλαδή υπάρχει $0 < \lambda < 1$ ώστε $a_0 = \lambda z + (1-\lambda) a$

Ισοδύναμα αφού $\lambda \neq 0$ $\quad z = \dfrac{1}{\lambda}\cdot a_0 + \dfrac{(\lambda - 1)\cdot a}{\lambda} \in A$

για $\mu = \dfrac{1}{\lambda} > 1$ έπεται ότι το στοιχείο $z = \mu a_0 + (1-\mu) a \in A$

(β) ⇒ (α) Έστω ότι το a_0 ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη, και έστω $a \in ri(A)$. Από υπόθεση υπάρχει $\mu > 1$

ώστε το στοιχείο $x = (1-\mu)\cdot a + \mu \cdot a_0 \in A$

Ισοδύναμα $\quad a_0 = \lambda \cdot a + (1-\lambda)\cdot x$ όπου $0 < \lambda = 1 - \dfrac{1}{\mu} < 1$

Επειδή $a \in ri(A)$ και $x \in A$, από το Θεώρημα

$a_0 \in ri(A)$.