

## Κυρτή Ανάλυση (2009-10) – Φυλλάδιο 7

Παράδοση των ασκήσεων του Φυλλαδίου 6 ως την Παρασκευή 11 Δεκεμβρίου 2009.

### I. Ασκήσεις

1. Έστω  $C$  μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Δείξτε ότι: αν  $x, y \in \mathbb{R}^n$  και  $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 = \|x - y\|_2$ , τότε  $x - p_C(x) = y - p_C(y)$ .

Αν  $\|p_C(x) - p_C(y)\|_2 = \|x - y\|_2$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , τι συμπεραίνετε για το  $C$ ;

2. Έστω  $K$  ένα μη κενό, συμπαγές κυρτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ . Δείξτε ότι υπάρχει οικογένεια  $\{B(x_i, r_i) : i \in I\}$  από κλειστές μπάλες στον  $\mathbb{R}^n$  ώστε

$$K = \bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i).$$

3. Έστω  $K$  ένα κυρτό σώμα στον  $\mathbb{R}^n$ . Το κέντρο βάρους του  $K$  είναι το σημείο  $y = (y_1, \dots, y_n)$  με συντεταγμένες

$$y_i = \frac{1}{|K|} \int_K \langle x, e_i \rangle dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

Δείξτε ότι  $y \in K$ .

4. (α) Περιγράψτε όλα τα κλειστά κυρτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^n$  που το συμπλήρωμά τους είναι επίσης κυρτό.

(β) Περιγράψτε όλα τα κυρτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^n$  τα οποία δεν έχουν κανένα υπερεπίπεδο στήριξης.

5. (α) Υπάρχει παράδειγμα ξένων μη κενών, κλειστών κυρτών υποσυνόλων του  $\mathbb{R}^2$  τα οποία δεν διαχωρίζονται γνήσια;

(β) Υπάρχει παράδειγμα ξένων μη κενών, κλειστών κυρτών υποσυνόλων του  $\mathbb{R}^2$  τα οποία να διαχωρίζονται γνήσια αλλά να μην διαχωρίζονται αυστηρά;

6. Έστω  $A$  και  $B$  κλειστά και κυρτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^n$  τα οποία περιέχουν το 0. Δείξτε ότι

$$(A \cap B)^\circ = \overline{\text{conv}(A^\circ \cup B^\circ)}.$$

7\*. Έστω  $A$  μη κενό, κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  με την εξής ιδιότητα: για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$  υπάρχει μοναδικό  $p_A(x) \in A$  ώστε  $\|x - p_A(x)\|_2 = d(x, A)$ . Δείξτε ότι το  $A$  είναι κυρτό.