Κυρτή Ανάλυση (2009-10) – Φυλλάδιο 2

Παράδοση των ασκήσεων του Φυλλαδίου 1 ως την Παρασκευή 16 Οκτωβρίου 2009.

I. Ασκήσεις

Έστω K και T κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε το ελάχιστο πλήθος μεταφορών x_i+T του T που η ένωσή τους καλύπτει το K. Μπορούμε να ζητήσουμε τα «κέντρα» x_i να ανήκουν στο K ή να επιλέγονται ελεύθερα στο χώρο. Έτσι, ορίζουμε

$$\overline{N}(K,T) = \min\left\{N \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n : K \subseteq \bigcup_{i=1}^N (x_i + T)\right\}$$

και

$$N(K,T) = \min\left\{N \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \dots, x_N \in K : K \subseteq \bigcup_{i=1}^N (x_i + T)\right\}.$$

Λόγω συμπάγειας, οι *αριθμοί κάλυψης* $\overline{N}(K,T)$ και $N(K,T)$ ορίζονται καλά.

1. Δείξτε ότι αν K, T και M είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\overline{N}(K,M) \leq \overline{N}(K,T) \cdot \overline{N}(T,M).$$

2. Από τους ορισμούς βλέπουμε εύκολα ότι

$$\overline{N}(K,T) \leq N(K,T).$$

Δείξτε ότι: αν τα K και T είναι συμμετρικά ως προς το 0, τότε

$$N(K,2T) \leq \overline{N}(K,T).$$

3. Έστω K ένα συμμετρικό (ως προς το 0) κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένας τρόπος για να εκτιμήσουμε τον αριθμό κάλυψης $N(K,\rho B_2^n)$ είναι ο εξής. Θεωρούμε ένα υποσύνολο $S = \{x_1, \dots, x_N\}$ του K με την εξής ιδιότητα:

$$(*) \;\; \text{αν } i \neq j \text{ τότε } \|x_i - x_j\|_2 \geq \rho.$$

(α) Δείξτε ότι

$$N \leq \frac{\left|K + \frac{\rho}{2}B_2^n\right|}{\left|\frac{\rho}{2}B_2^n\right|}.$$

(β) Δείξτε ότι: για κάθε $\rho > 0$ υπάρχει μεγιστικό $S \subset K$ που ικανοποιεί την $(*)$. Με τον όρο «μεγιστικό» εννοούμε ότι το S ικανοποιεί την $(*)$ αλλά αν προσθέσουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο $z \in K \setminus S$ στο S, τότε το $S \cup \{z\}$ δεν ικανοποιεί την $(*)$. Λέμε ότι το S είναι ένα *ρ-δίκτυο.*

(γ) Δείξτε ότι αν $S = \{x_1, \dots, x_N\}$ είναι ένα ρ-δίκτυο στο K, τότε

$$N(K,\rho B_2^n) \leq N.$$

(δ) Δείξτε ότι: για κάθε $\rho \in (0,1)$,

$$N(B_2^n, \rho B_2^n) \leq \left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^n.$$

4*. Έστω $S = \{x_1, \dots, x_N\} \subset S^{n-1}$ με την εξής ιδιότητα: αν $i \neq j$ τότε $\|x_i - x_j\|_2 \geq \sqrt{2}$. Δείξτε ότι $N \leq 2n$.

II. Η συνάρτηση Γάμμα

Η συνάρτηση $\Gamma : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ ορίζεται μέσω της

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση Γ ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\Gamma(1) = 1$.

(β) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *για κάθε* $x > 0$.

(γ) $\Gamma(n+1) = n!$ *για κάθε* $n = 0, 1, 2, \dots$

(δ) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση Γ είναι *λογαριθμικά κυρτή*: η $\log \Gamma$ είναι κυρτή συνάρτηση.

2. Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τη «μοναδιαία μπάλα» του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$: είναι το σύνολο

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}.$$

Δείξτε ότι, για κάθε $p > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p} dx = |K| \cdot \int_0^\infty p t^{n+p-1} e^{-t^p} dt.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να γράψετε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^p} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\|x\|}^\infty p t^{p-1} e^{-t^p} dt \right) dx.$$

Αλλάξτε (προσεκτικά) τη σειρά της ολοκλήρωσης.

3. Έστω $1 \leq p < \infty$. Δείξτε ότι ο όγκος της $B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \leq 1\}$ είναι ίσος με

$$|B_p^n| = \frac{\left[2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}.$$

4. Έστω $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ συνάρτηση με τις εξής ιδιότητες: (α) $g(1) = 1$, (β) $g(x+1) = xg(x)$ για κάθε $x > 0$, (γ) η $\log g$ είναι κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι $g \equiv \Gamma$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας μόνο τις (α), (β) και (γ) αποδείξτε ότι

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

5. Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η ισότητα

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \Gamma(x).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.