Επιχειρησιακή Έρευνα 2020-06-03

Wednesday, June 3, 2020 1:21 PM

Άσκηση 1

Δήμος n διαμερίσματα

Επιτροπή από K αντιπροσώπους

Πληθυσμός διαμ. i $= M_i$, $i=1,\dots,n$, $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$

Ιδανικός αρ. εκπροσώπων από διαμ i

$d_i = K \frac{M_i}{M}$ (γενικά όχι ακέραιοι)

Κριτήριο: Αν a_i = αρ. αντιπρ. από διαμ i

$$\min_{(a_1,\dots,a_n)} \sum_{i=1}^{n} |a_i - d_i|$$

(α) Να μοντελοποιηθεί ως πρόβλημα δυν. προγρ.

(β) Να βρεθεί η βέλτιστη λύση αν $n=3$, $K=3$, $d_1=0.4$, $d_2=1.4$, $d_3=1.2$ ($d_1+d_2+d_3=K$)

Απάντηση Πρόβλημα κατανομής πόρων

Αγαθό: έδρες στην επιτροπή ($K=3$)

Δραστηριότητες: διαμερίσματα (στάδια) $N=3$

X_t = αρ. εδρών που δεν έχουν κατανεμηθεί στα διαμερίσματα $1,2,\dots,t-1$

(είναι διαθέσιμες για τα διαμερίσματα $t,t+1,\dots,N$)

a_t = αρ. εδρών στο διαμ. t $(0 \le a_t \le X_t,\ a_t \in \mathbb{Z})$

$$X_{t+1} = X_t - a_t$$

Κόστος $c_t(X_t,a_t) = |a_t - d_t|$

Τελικό κόστος $c_{N+1}(x_{N+1}) = 0$ (λάθος επιτρέπει $x_{N+1}>0$)

Σωστό $c_{N+1}(x_{N+1}) = \begin{cases} 0, & x_{N+1}=0 \\ +\infty, & x_{N+1}\neq 0 \end{cases}$ (απαγορεύουμε $x_{N+1}>0$)

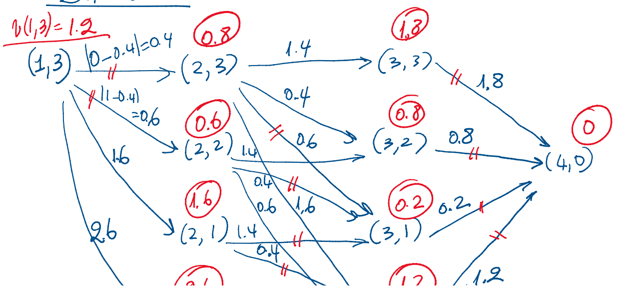
Εξίσωση βελτιστότητας

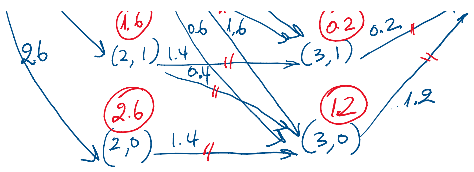
$$v(t,x_t) = \min_{\substack{0\le a_t \le x_t \\ a_t\in\mathbb{Z}}} \left\{ |a_t-d_t| + v(t+1, x_t-a_t) \right\}$$

$$v_{N+1}(x_{N+1}) = \begin{cases} 0 & x_{N+1}=0 \\ +\infty, & x_{N+1}>0 \end{cases}$$

(β) $K=3$, $n=3$, $d_1=0.4$, $d_2=1.4$, $d_3=1.2$

Δίκτυο





Βέλτιστες διαδρομές

1) $(1,3) \xrightarrow[a_1=0]{} (2,3) \xrightarrow[a_2=2]{} (3,1) \xrightarrow[a_3=1]{} (4,0)$

2) $(1,3) \xrightarrow[a_1=1]{} (2,2) \xrightarrow[a_2=1]{} (3,1) \xrightarrow[a_3=1]{} (4,0)$

Άσκηση 2   Μη γραμμικός Προγρ (ΚΚΤ)

Έστω η μγπ

$$\max f(\underline{x}) \qquad (\underline{x} \in \mathbb{R}^n)$$
$$g(\underline{x}) = 0 \qquad (g(x): \text{γραμμική})$$
$$\underline{x} \geq 0$$

Τότε $g(x)$: κυρτή και κοίλη
$-g(x)$: κοίλη και κυρτή

Πως μετατρέπονται οι συνθήκες ΚΚΤ σε αυτή την περίπτωση;

$$\max f(x)$$
$$g(\underline{x}) \leq 0 \qquad \mu_1$$
$$-g(\underline{x}) \leq 0 \qquad \mu_2$$
$$\underline{x} \geq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mu_1 \frac{\partial g}{\partial x_j} + \mu_2 \frac{\partial g}{\partial x_j} \leq 0$$

$$x_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mu_1 \frac{\partial g}{\partial x_j} + \mu_2 \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 g(x) &= 0 \\ -\mu_2 g(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{πλεοναστικές}$$

$$\left.\begin{aligned} g(x) &\leq 0 \\ -g(x) &\leq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(x) = 0$$

$$\mu_1, \mu_2, \underline{x} \geq 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_j} - (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial g}{\partial x_j} \leq 0 \qquad j = 1, \dots, n \\ &x_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) = 0 \qquad j = 1, \dots, n \\ &\underline{x} \geq 0, \qquad \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{aligned}}$$

$$\mu = \mu_1 - \mu_2, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Συνθήκες ΚΚΤ

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_j} \leq 0 \quad , j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_j} \le 0, \quad j=1,\dots,n$$

$$x_j\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial g}{\partial x_j}\right) = 0, \quad j=1,\dots,n$$

$$g(\underline{x})=0$$

$$\underline{x} \ge 0, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 3

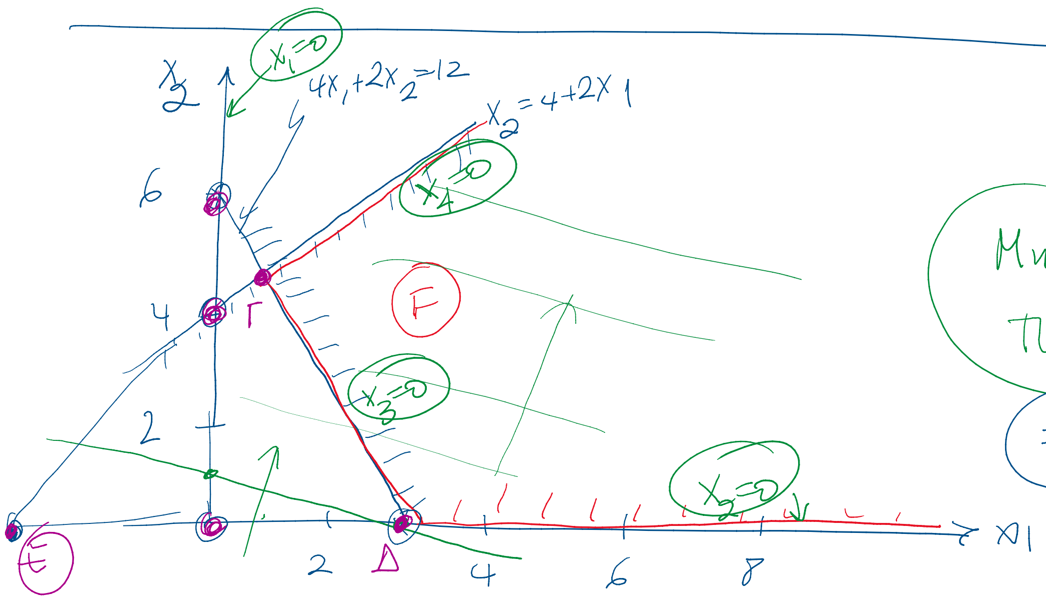
(άσκηση 9 από σειρά ΓΠ)

$$z = \max \; x_1 + 3x_2$$
$$4x_1 + 2x_2 \ge 12$$
$$x_2 - 2x_1 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

α) Γραφική επίλυση

β) Σε ΚΜ.

γ) Να βρεθούν όλοι οι βασικοί πίνακες κ' να εξεταστεί αν αντιστοιχούν σε ΒΕΛ.



$x_1+3x_2=3$

Μη φραγμένο Πρόβλημα

$z=+\infty$

(β)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= 12 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_4 \ge 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4$

Τετραγωνικοί υποπίνακες 2x2 του A

1) $B = (P_1 \ P_2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (x_3 = x_4 = 0) \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(κορυφή Γ)

$$B x_B = b : \quad \left.\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 = 12 \\ -2x_1 + x_2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \end{array} > 0$$

ΒΕΛ $\Longleftrightarrow$ κορυφή Γ του F

2) $B = (P_1 \ P_3) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_2 = x_4 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 - x_3 = 12 \\ -2x_1 \qquad = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_3 = -20 \end{array}$$

Βασική λύση, όχι εφικτή.

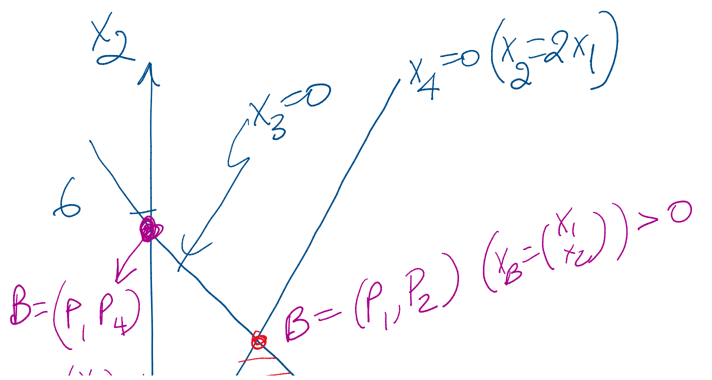
Με τον ίδιο τρόπο και στους υπόλοιπους 2x2 πίνακες.

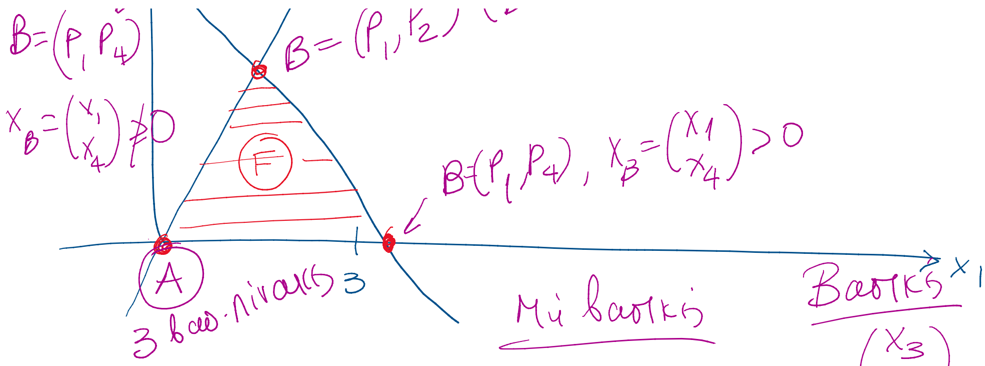
Άσκηση 10 (Σειρά ΓΠ)

Δείτε την με τη διόρθωση

$$\boxed{\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_2 - 2x \le 0 \end{array}}$$

$$\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ -2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 0 \end{array}$$





Μη βασικές	Βασικές		
$x_1=x_2=0$ ή	$x_B=\binom{x_3}{x_4}$	$(x_4=0)$	εκφυλισμένη ΒΕΛ
$x_1=x_4=0$	$x_B=\binom{x_2}{x_3}$	$(x_2=0)$	εκφ.
$x_2=x_4=0$	$x_B=\binom{x_1}{x_3}$	$(x_1=0)$	-//-

A $\quad x_1=x_2=x_4=0$.

A: αντιστοιχούν 3 βασικοί πίνακες.

$$B_1=(P_3,P_4),\quad B_2=(P_2,P_3),\quad B_3=(P_1,P_3)$$

Άσκηση 15

Ερ. (δ) : ... αντί για "να δειχθεί ότι αυτή νέα λύση είναι βέλτιστη"

ισχύει "για ποιές τιμές του r η νέα λύση είναι βέλτιστη".

Αποδείξεις

1) Σε ένα ΠΓΠ με φραγμένη F υπάρχει πάντα μια κορυφή που είναι βέλτιστη λύση.

(2) Κορυφή F $\iff$ ΒΕΛ του $\{Ax=b,\ x\geq 0\}$