Προβλήματα Κυρτού Προγραμματισμού

max $f(\underline{x})$ όπου $f, g_1, \ldots, g_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

υ.π. $g_1(\underline{x}) \le 0$ $(\underline{x} \in \mathbb{R}^n)$

$\vdots$

$g_p(\underline{x}) \le 0$

f: κοίλη

$g_1, \ldots, g_p$: κυρτές

[Ισοδ. min $f(x)$

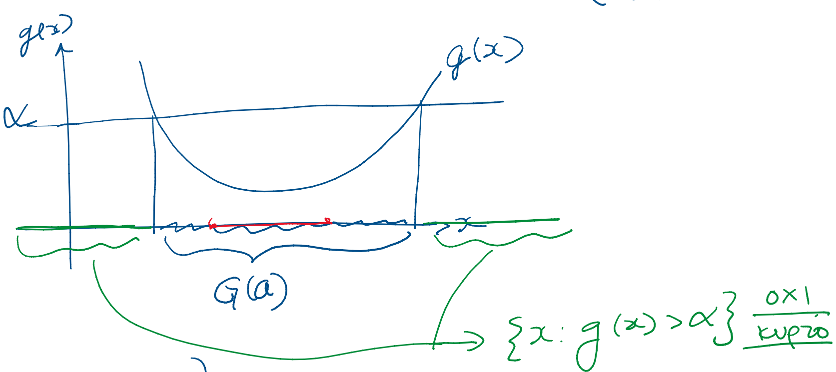
$g_i(x) \le 0, \ i=1,\ldots,p$

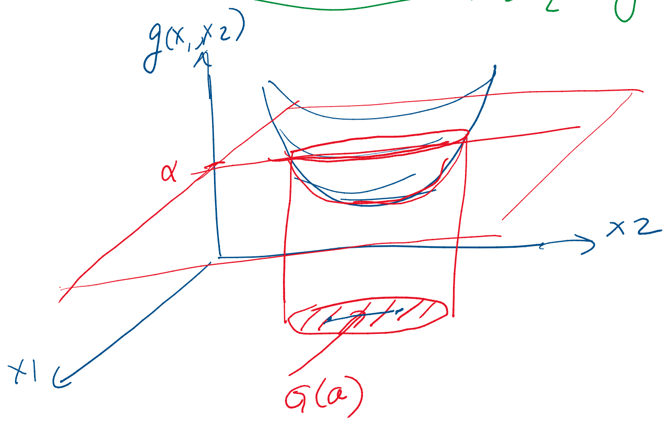
$f, g_1, \ldots, g_p$ κυρτές]

Παρατήρηση

Λήμμα 1: Αν $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή τότε $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$G(\alpha) = \{\underline{x} : g(\underline{x}) \le \alpha\}$: κυρτό σύνολο (level sets)





Απόδειξη Χρησ. ορισμού κυρτού συνόλου κ' κυρτής συνάρτησης

$A \subseteq \mathbb{R}^n$: κυρτό $\quad \forall x_1, x_2 \in A, \ \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in A$

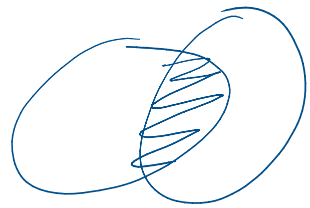
$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή $\quad \forall x_1, x_2 \in A, \ \lambda \in [0,1] \Rightarrow$

$g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή $\quad \forall x_1, x_2 \in A,\ \lambda \in [0,1] \Rightarrow$

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \le \lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2)$$

Λήμμα 2 $\quad F_1, \dots, F_p \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτά

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{p} F_i$ κυρτό σύνολο.

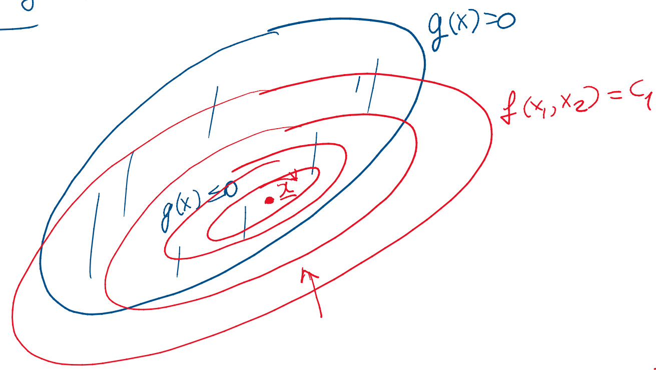


$\max f(x_1,x_2)$ $\quad$ f: κοίλη

$g(x_1,x_2) \le 0$ $\quad$ g (κυρτή)

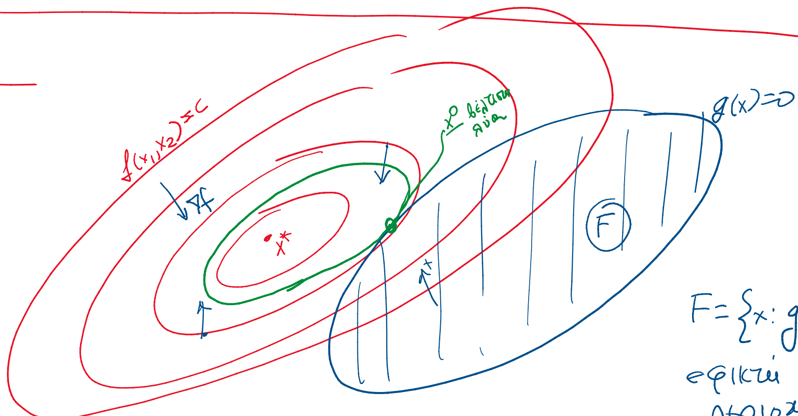
Πρ. 1

$\nabla f(\underline{x}^*) = 0$



$g(x^*) \le 0 \quad \Rightarrow \quad x^*$ βέλτιστη λύση του $\begin{cases} \max f(\underline{x}) \\ g(\underline{x}) \le 0 \end{cases}$

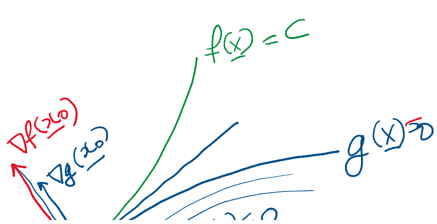
Πρ. 2

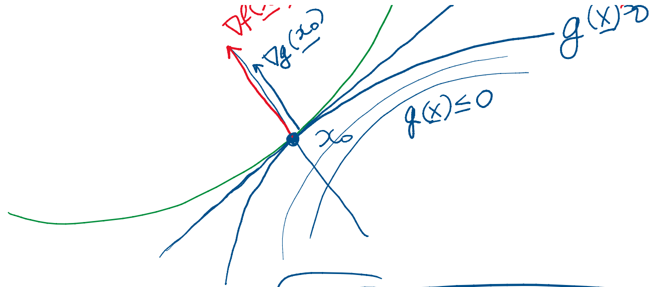


$F = \{x : g(\underline{x}) \le 0\}$

εφικτή περιοχή

$\underline{x}^* : \nabla f(\underline{x}^*) = 0, \quad \underline{x}^* \notin F$



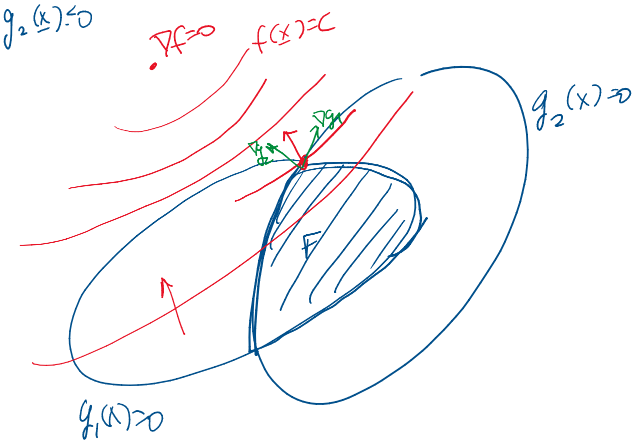


Συνθήκη βελτίστου: $\boxed{\nabla f(\underline{x}_0) = \mu \nabla g(x_0) \text{ για κάποιο } \mu>0}$

$$\nabla f(x_0) - \mu \nabla g(x_0) = 0.$$

Παρ. 3

$$\max f(\underline{x})$$
$$g_1(\underline{x}) \leq 0$$
$$g_2(\underline{x}) \leq 0$$



Συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Θεώρημα Έστω πρ. κυρτού προγραμματισμού

$$\max f(x) \qquad f: \text{κοίλη} \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$g_i(x) \leq 0, \; i=1,\dots,p \qquad g_i: \text{κυρτές}$$

Αν υπάρχουν $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$ και $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^p$ τέτοια ώστε:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}^*) = 0 \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$\mu_i \, g_i(\underline{x}^*) = 0 \quad , \quad i=1,\dots,p$$

$$\mu_i \geq 0 \qquad i=1,\dots,p$$

$$g_i(\underline{x}^*) \leq 0 \qquad i=1,\dots,p$$

Τότε $\underline{x}^*$: βέλτιστη λύση του ΠΚΠ.
(τοπικό μέγιστο της f υπό τους $g_i(\underline{x}) \leq 0$, $i=1,\dots,p$)

Πόρισμα 1 $\quad \max\limits_{\underline{x}\geq 0} f(\underline{x}) \qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη

Εμπίπτει στο ΠΚΠ $\quad \underline{x} \geq 0 \iff \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ \vdots \\ x_n \geq 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} -x_1 \leq 0 \\ \vdots \\ -x_n \leq 0 \end{matrix}$

$p=n, \quad g_i(\underline{x}) = -x_i \quad , i=1,\dots,p$

$$g_i(x_1,\dots,x_n) = -x_i \implies \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \begin{cases} -1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

$$\implies \sum_{i=1}^{p\,(p=n)} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = -\mu_j$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x_j} + \mu_j = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x_j} = -\mu_j$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} + \mu_j = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \Rightarrow \mu_i x_i = 0$$

Οι συνθήκες <u>KKT γίνονται</u>

Αν υπάρχει $x^* \geq 0$: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) = 0$ αν $x_j^* > 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) \leq 0$ αν $x_j^* = 0$

τότε x^* : βέλτιστη λύση

<u>Πόρισμα 2</u> $\max f(x)$

$g_1(x) \leq 0$

$\vdots$

$g_p(x) \leq 0$

$x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n$

$-x_1 \leq 0 \quad g_{p+1}(x) \leq 0$

$\vdots$

$-x_n \leq 0 \quad g_{p+n}(x) \leq 0$

Αν $\exists \; x^* \in \mathbb{R}^n$ και $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) \leq 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

Τότε x^* βέλτιστη

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) - \sum_{i=1} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}) \leq 0 \qquad j=1,\dots,n$$

$$x_j^* \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^*) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}^*) \right) = 0 \qquad j=1,\dots,n$$

$$g_i(\underline{x}^*) \leq 0 \qquad i=1,\dots,p$$

$$\mu_i g_i(\underline{x}^*) = 0 \qquad i=1,\dots,p$$

$$x_j^* \geq 0 \qquad j=1,\dots,n$$

τότε

$\underline{x}^*$ βέλτιστη λύση