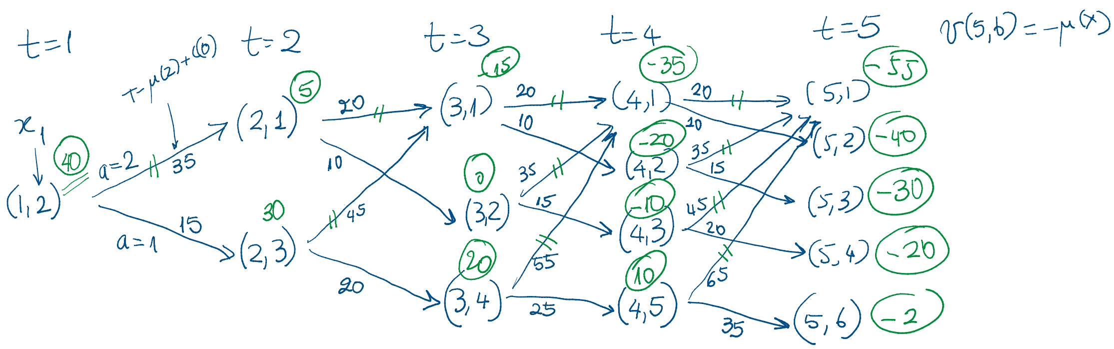
Αριθμητικό Παράδειγμα Συντήρησης-Αντικατάστασης

$H=7, \quad N=4, \quad x_1=2, \quad T=70$

x	$c(x)$	$\mu(x)$
0	5	—
1	10	55
2	15	40
3	20	30
4	25	20
5	35	10
6	50	2
7	—	0



$$v(4,1)=\min\{20-55,\ 10-40\}=\min\{-35,\ -30\}=-35$$

$v(1,2)=40$ ελαχ. κόστος επόμενες 5 περιόδους

Βέλτιστη πολιτική: $(1,2)\to(2,1)\to(3,1)\to(4,1)\to(5,1)$

$a^*=2$ παντού (αντικατάσταση σε κάθε περίοδο)

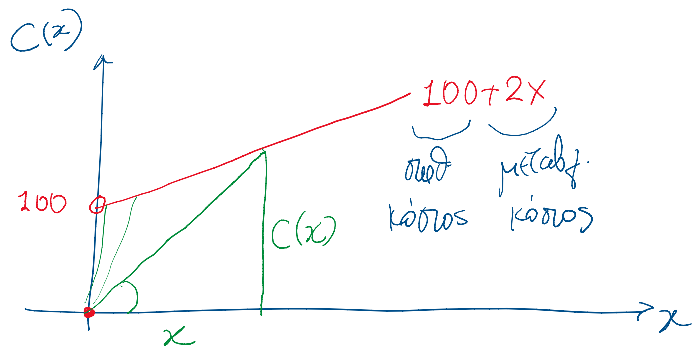
Εφαρμογή 2: Διαχείριση Παραγωγής και Αποθεμάτων

x: ποσότητα παραγωγής

$C(x)$: κόστος παραγωγής x μονάδων $\qquad C'(x)>0$

1) $C(x) = 5x \qquad \bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = 5$

2) $C(x) = \begin{cases} 100 + 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad \bar{C}(x) = \begin{cases} 0/0\,? & x = 0 \\ \frac{100}{x} + 2 \downarrow & \end{cases}$



Δεδομένα

Προγραμματισμός παραγωγής ενός προϊόντος για N περιόδους

Παραγωγή: στην αρχή κάθε περιόδου

Ζήτηση περιόδου $t = d_t$, $t = 1, \dots, N$ (γνωστή)

$K_t(a)$ = Κόστος παραγωγής a μονάδων προϊόντος κατά την περίοδο t.

h_t = Κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος κατά την περίοδο t.

m = μέγιστη δυνατή ποσότητα παραγωγής σε κάθε περίοδο

M = χωρητικότητα αποθήκης

Να βρεθεί η πολιτική παραγωγής (ποσότητα παραγωγής σε κάθε περίοδο) έτσι ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση όλων των περιόδων με το ελάχιστο συνολικό κόστος όλων των περιόδων με το ελάχιστο συνολικό κόστος

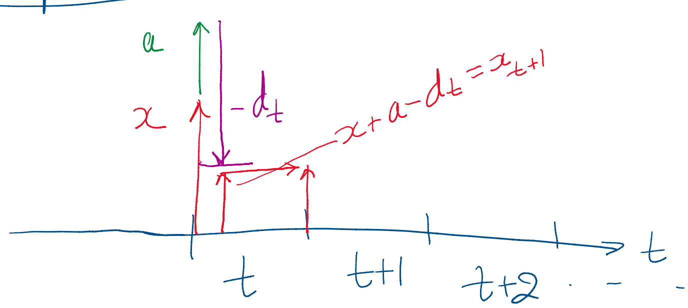
1) Στάδια : περίοδοι $t=1,\dots,N+1$

2) Κατάσταση (t,x) $\qquad x\in\mathbb{Z}$

x = στάθμη (ποσότητα) αποθέματος στην αρχή περιόδου t.

3) Αποφάσεις $\qquad a\in\mathbb{Z}$ $\quad a_t$ = ποσότητα παραγωγής στην περίοδο t.

4) Δυναμική



Υπόθεση
Παραγωγή ακαριαία στην αρχή περιόδου
Ζήτηση ικανοποιείται στην αρχή περιόδου (μετά την παραγωγή)

$$x_{t+1}=x+a-d_t$$

$D_t(x)=?$ δυνατές αποφάσεις στην περ. t:

1) $x+a\geq d_t$ (για να ικανοποιηθεί η ζήτηση)

2) $a\geq 0$

3) $a\leq m$

4) $x+a-d_t\leq M$: $a\leq M-x+d_t$

$D_t(x)$

$(1,2)$ $\quad a\geq \max(d_t-x,0)$ $\Big\}\Rightarrow$ $\boxed{\max(d_t-x,0)\leq a\leq \min(m,M-x+d_t)}$

$(3,4)$ $\quad a\leq \min(m, M-x+d_t)$

(1,2) $a \geq \max(d_t - x, 0)$

(3,4) $a \leq \min(m, M - x + d_t)$

$$\Rightarrow \boxed{\max(d_t - x, 0) \leq a \leq \min(m, M - x + d_t)} \quad a \in \mathbb{Z}$$

5) <u>Κόστος μιας περιόδου</u>

(t, x), παραγωγή $= a$

Κόστος παραγωγής $= K_t(a)$

Κόστος αποθήκευσης $= h_t \cdot (x + a - d_t)$

$$c(x, a) = K_t(a) + h_t (x + a - d_t)$$

6) Τερματικό κόστος $\hat{c}(x)$

π.χ. $\hat{c}(x) = 0$ ($x = x_{N+1}$: περίσσευμα προϊόντος στο τέλος του ορίζοντα)

$\hat{c}(x) = \theta \cdot x$

$$\theta = \begin{cases} \text{αξία} & \theta < 0 \\ \text{κόστος απόρριψης} & \theta > 0 \end{cases}$$

$v(t, x) =$ ελάχιστο κόστος παραγωγής και αποθήκευσης για περιόδους $t, t+1, \dots, N+1$ δεδομένου ότι στην αρχή περ. t το ύψος του αποθέματος είναι x.

<u>Εξίσωση βελτιστότητας</u>

$$v(N+1, x) = \hat{c}(x)$$

$$v(t, x) = \min_a \{ \overbrace{K_t(a) + h_t(x + a - d_t)}^{c(x,a)} + v(t+1, \overbrace{x + a - d_t}^{x_{t+1}}) \}$$

$$v(t,x) = \min_{a \in D_t(x)} \left\{ \overbrace{K_t(a) + h_t(x+a-d_t)} + v(t+1,\, x+a-d_t) \right\}$$

Αριθμητικό Παράδειγμα στο επόμενο μάθημα