$$Ax=b,\quad x\geq 0$$

Βασική εφικτή λύση ΠΓΠ

x : ΒΕΛ αν οι αυστηρά θετικές συντεταγμένες του αντιστοιχούν σε γρ. ανεξάρτητες στήλες του A

"Αλγόριθμος"

Παίρνω έναν υποπίνακα $B_{m\times m}$ του A

Αν $|B|=0$ απορρίπτεται

Αν $|B|\neq 0$ και $B=(P_1,P_2,\dots,P_m)$ (χωρίς βλάβη γεν)

τότε η λύση $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ βασική λύση

$$B\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=b \iff \sum_{i=1}^{m} x_i P_i=b \Rightarrow$$ μοναδική λύση $(x_1,\dots,x_m)$

Αν $x_1,\dots,x_m\geq 0 \Rightarrow x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ είναι και εφικτή

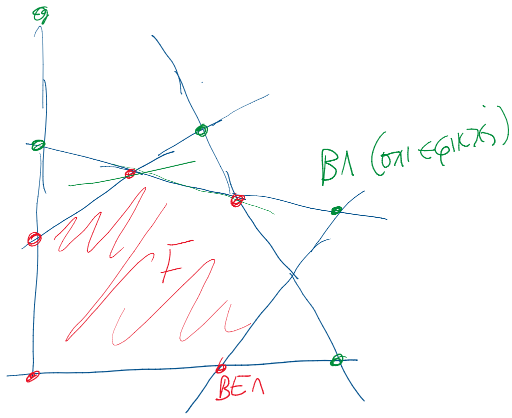
$\Rightarrow$ ΒΕΛ ($\Leftrightarrow$ κορυφή)

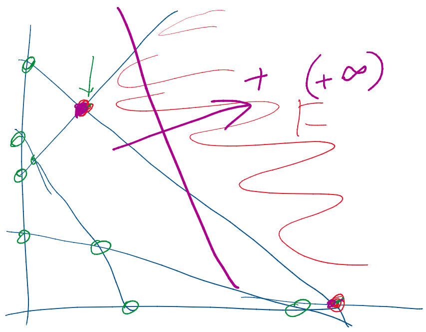
Η τιμή της αντικ. συνάρτησης είναι

$$z=c'x=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=\sum_{i=1}^{m}c_ix_i$$ (το κρατάμε)

Επαναλαμβάνουμε για όλους τους $m\times m$ υποπίνακες κ' στο τέλος συγκρίνουμε τις τιμές του z για όσες ΒΕΛ εντοπίσαμε.

Οι ΒΕΛ που έχουν τη μέγιστη τιμή του z είναι κ' βέλτιστη λύση του ΠΓΠ.





$|B|\neq 0$, $B_{m\times m}$ υποπίνακας του A

Αριθμός των ΒΕΛ $\leq$ Αριθμός των αντιστρ. υποπινάκων $m\times m$ B του A

$\leq$ Αριθμός των υποπινάκων $m\times m$ του $A^{(m\times n)}$

$=\binom{n}{m}$ = αρ. συνδυασμών m αντικ. από n

Ο "αλγόριθμος" θα εντοπίσει τη βέλτιστη λύση (αν F είναι φραγμένο) σε $<\infty$ αριθμό επαναλήψεων

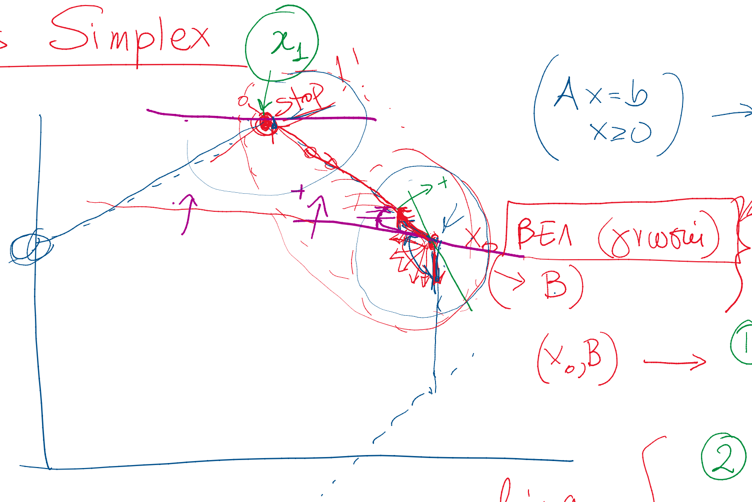
(πεπερασμένος αλγόριθμος)

Όμως ο αριθμός βημάτων γενικά αυξάνεται εκθετικά με τα m και n.

Μέθοδος Simplex

με τα m και n.

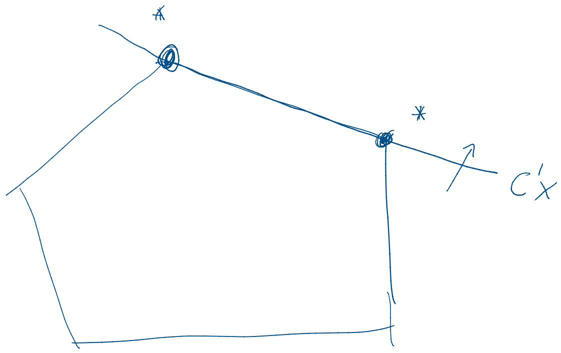
Μεθοδος Simplex



$\left(\begin{array}{l} Ax=b \\ x\geq 0 \end{array}\right) \to$

$(x_0, B) \to$ ① Ελέγχω αν x_0 βέλτιστη — Κριτήριο βελτιστότητας

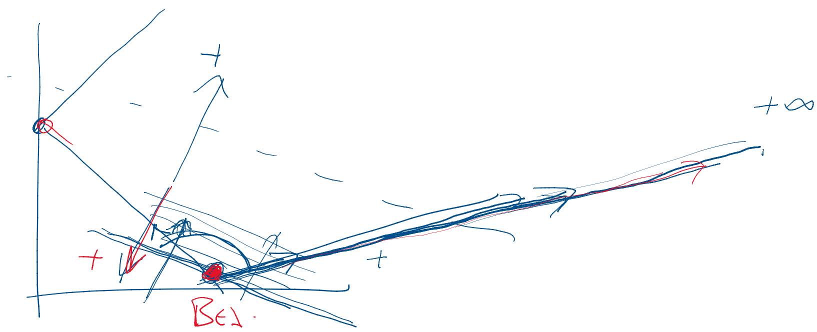
βήμα βελτίωσης: ② αν x_0 δεν είναι βέλτιστη, βρίσκω μια νέα ΒΕΛ που είναι αυστηρά καλύτερη από την x_0, έστω x_1



Αλγόριθμος πεπερασμένης βελτίωσης
(finite improvement algorithm)

Οδηγεί σε βέλτιστη λύση σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων

Ο αριθμός βημάτων που γίνονται (κατά μέσο όρο) με αυτόν τον αλγόριθμο είναι τάξεις μεγέθους μικρότερος από τον αριθμό των ΒΕΛ



Πγπ σε ΚΜ $\max c'x$, $Ax = b$, $x \geq 0$ $\quad c \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ b \geq 0$

P_j : j-στήλη του A

$A = (P_1, \dots, P_n)$

Αν $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j P_j \qquad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$

1. Έστω μια (αρχική) ΒΕΛ x_0 (υποθ. μη εκφυλισμένη)

$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$ έχει ακριβώς m θετικές συνιστώσες

χβγ έστω $x_{01}, \dots, x_{0m} > 0$

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} x_B \\ \\ \} x_N \end{matrix}$$

$x_{01}, \dots, x_{0m}$: βασικές μεταβλητές της x_0.

$x_{0m+1}, \dots, x_{0n} (=0)$: μη βασικές μεταβλητές

$x_0 = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \qquad x_B \in \mathbb{R}^m,\ x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$

$$A = (\underbrace{\overbrace{P_1, \dots, P_m}^{B}}_{\text{βασικές στήλες που αντιστ. στην ΒΕΛ } x_0}, \overbrace{P_{m+1}, \dots, P_n}^{N})$$

$B = (P_1, \dots, P_m)$, $N = (P_{m+1}, \dots, P_n)$

$$A = (\overset{m}{B} \ \vdots\ \overset{n-m}{N}), \qquad x_0 = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \begin{matrix} \}m \\ \}n-m \end{matrix}$$

$x_0 \in F \Rightarrow Ax_0 = b \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_{0j} P_j = b$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_{0i} P_i}_{Bx_B} + \underbrace{\sum_{j=m+1}^{n} x_{0j} P_j}_{Nx_N} = b$$

(και επειδή $x_N = 0$ $\Rightarrow Bx_B = b \Rightarrow \boxed{x_B = B^{-1}b}$)

$$x_0 = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

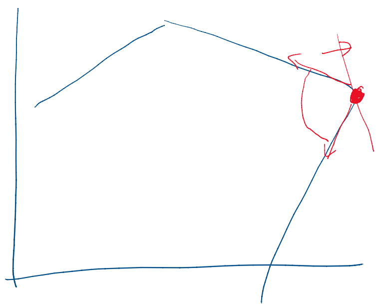
Επίσης έστω $z_0 = c'x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_{0j} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{0i} + \sum_{j=m+1}^{n} c_j \underbrace{x_{0j}}_{=0}$

Επίσης έστω $z_0 = c' x_0 = \sum_{j=1} c_j x_{0j} = \sum_{i=1} c_i x_{0i} + \underbrace{\sum_{j=m+1} c_j x_{0j}}$

$$\Rightarrow \quad z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{0i} = c_B' x_B$$

όπου $c' = (\underbrace{c_1, \dots, c_m}_{c_B}, \underbrace{c_{m+1}, \dots, c_n}_{c_N})$

$$z_0 = c_B' x_B + c_N' x_N = c_B' x_B = \boxed{c_B' B^{-1} b = z_0}$$



$x_0, B \Rightarrow x_B = B^{-1} b$

$z_0 = c_B' B^{-1} b$

2) $P_1, \dots, P_m$ γραμ. ανεξάρτητα διαν. $\in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow \{P_1, \dots, P_m\}$: βάση του $\mathbb{R}^m$

$B = (P_1, \dots, P_m)$: βασικός πίνακας

$\Rightarrow$ Όλες οι στήλες $P_1, \dots, P_n$ του A γράφονται με μοναδ. τρόπο ως γραμμ. συνδ. των $P_1, \dots, P_m$

$\forall j = 1, \dots, n \qquad P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i$

$\left[\begin{array}{l} \text{αν } j=1 \quad P_1 = \sum_{i=1}^{m} x_{i1} P_i \\ x_{11} = 1, \ x_{21} = \dots = x_{m1} = 0 \end{array}\right] \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$Y_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix} \Rightarrow P_j = B \underline{Y_j} \Rightarrow Y_j = B^{-1} P_j \qquad j = 1, \dots, n$

$$Y = \Big(\overbrace{Y_1, Y_2}^{I} \dots, Y_n \Big) = Y = B^{-1} A$$

$$\big(B^{-1} P_1 \quad B^{-1} P_2 \ \dots \ B^{-1} P_n \big)$$

$$B^{-1} A = \underbrace{B^{-1}}_{m \times m} \big(\underline{P_1 \ \cdots \ P_n} \big) = \big(\underline{B^{-1} P_1 \ B^{-1} P_2 \cdots B^{-1} P_n} \big)$$

$m \times n$

$$A = (\underbrace{B}_{m\times m} \quad \underbrace{N}_{m\times(n-m)}) \Rightarrow B^{-1}A = (B^{-1}B \quad B^{-1}N) = (I \quad B^{-1}N)$$

$$\Rightarrow Y = (I \quad B^{-1}N)$$

Αν θεωρήσουμε

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \Rightarrow$$

$$\boxed{Ix_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b} \Rightarrow \boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N}$$

$$\underbrace{[I \quad B^{-1}N]}_{Y} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = B^{-1}b \Rightarrow Yx_0 = B^{-1}b$$

$$Y = [I \quad B^{-1}N]$$ από γραμμοπράξεις του A ώστε στις m πρώτες στήλες να εμφανιστεί ο μοναδιαίος