Επιχειρησιακή Έρευνα 16/3/2020

Monday, March 16, 2020 1:02 PM

Άσκηση 1 Τηλ. κέντρο – 24 ώρες

Περίοδος	Ελαχ Αρ. Υπαλλήλων
8–12	10
12–4	15
4–8	12
8–12	8
12–4	4
4–8	6

Οι υπάλληλοι εργάζονται σε δύο συνεχόμενες 4ωρες βάρδιες. Μπορούν να αρχίζουν την εργασία τους στην αρχή οποιουδήποτε 4ώρου.

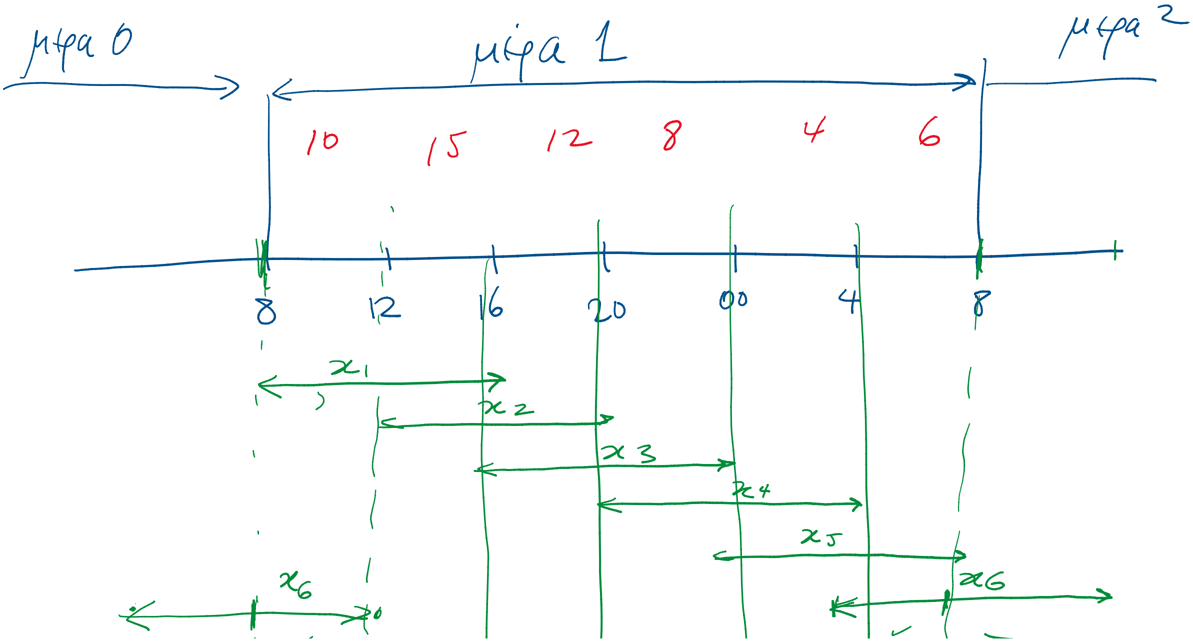
Ελάχιστος δυνατός συνολικός αριθμός υπαλλήλων

---

x_1 : αρ υπαλλήλων που εργάζονται 8 – 16
x_2 " " 12 – 20
x_3 16 – 24
x_4 20 – 4
x_5 0 – 8
x_6 4 – 12

$$\min \; (x_1 + x_2 + \dots + x_6)$$

st. (? ↓)



$$x_1 + x_6 \geq 10 \quad x_1 + x_2 \geq 15 \quad x_2 + x_3 \geq 12 \quad x_3 + x_4 \geq 8 \quad x_4 + x_5 \geq 4 \quad x_5 + x_6 \geq 6$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

Άσκηση 2

Παραγωγή 2 προϊόντων Α, Β
με μια κοινή πρώτη ύλη
με χρόνο παραγωγής σε ένα κοινό μηχάνημα.

Προϊόν	A (m^2)	B (m^2)	Διαθέσιμο
Απαιτήσεις πρώτης ύλης	$5\,kg/m^2$	$7\,kg/m^2$	$1000\,kg$
Ρυθμός παραγωγής	$\boxed{10\,m^2/h}$	$12\,m^2/h$	$16\,h$
Κέρδος	$12\,€/m^2$	$14\,€/m^2$	

Μοντελοποίηση 1

x_1: παραγ. ποσότητα A σε μια μέρα (m^2)
x_2: " " B " " "

$$\boxed{\begin{aligned} \max \quad & 12x_1 + 14x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 5x_1 + 7x_2 \leq 1000 \\ & \underbrace{\overset{t_1}{\frac{x_1}{10}} + \frac{x_2}{12}}_{\text{ώρες παραγωγής}} \leq 16 \end{aligned}}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Μοντελοποίηση 2

t_1 = χρόνος (h) παραγωγής A σε μια μέρα
t_2 = " " B " " "

Ποσότητα παραγωγής = $\begin{cases} A: & 10 \cdot t_1 \\ B: & 12 \cdot t_2 \end{cases}$

$\max \; 12 \cdot 10 \cdot t_1 + 14 \cdot 12\, t_2$ $\quad \max \; 120t_1 + 168t_2$

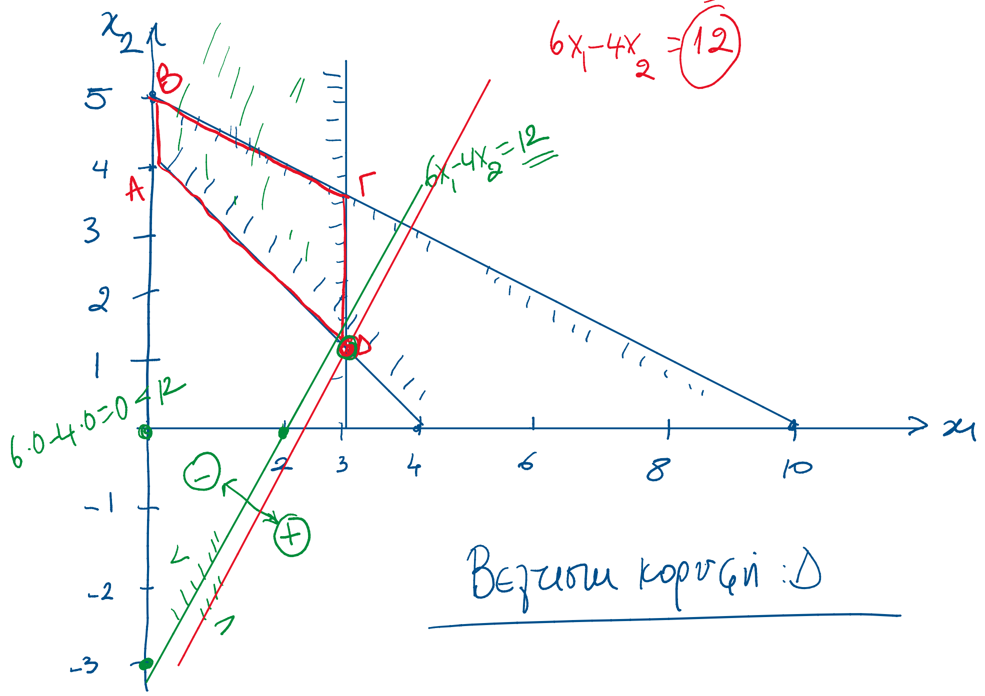
$$\max \quad 12\cdot 10\cdot t_1 + 14\cdot 12\, t_2$$
$$\text{s.t.} \quad 5\cdot 10\cdot t_1 + 7\cdot 12\, t_2 \le 1000$$

$$\boxed{\begin{aligned} \max\ & 120t_1 + 168t_2 \\ \text{s.t.}\ & 50t_1 + 84t_2 \le 1000 \\ & t_1 + t_2 \le 16 \\ & t_1, t_2 \ge 0 \end{aligned}}$$

✓

Άσκηση 3

$$\max \quad 6x_1 - 4x_2$$
$$x_1 + x_2 \ge 4$$
$$[2x_1 + 4x_2 \le 20]\ x$$
$$x_1 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



Βέλτιστη κορυφή: Δ

$$A: \left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = 6x_1 - 4x_2 = -16$$

$$B: \left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = -20$$

$$\Gamma: \left.\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 7/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = 6\cdot 3 - 4\cdot \frac{7}{2} = 4$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 20 \end{aligned}\right\}$$
$$4x_2 = 14$$
$$x_2 = 7/2$$

$x_2 = 7/2 \Big|$ $\quad = \underline{4}$

$4x_2 = 14$

$x_2 = 14/4 = 7/2$

Δ: $\left.\begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{matrix}\right\} z = 6\cdot 3 - 4\cdot 1 = \underline{14}$

$x_1^* = 3 \quad x_2^* = 1$ $\quad \boxed{x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; z^* = 14}$

<u>Κυρτά σύνολα</u>

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>κυρτό</u> αν $\forall\, x_1, x_2 \in F$, $\forall\, \lambda \in [0,1]$

<u>τότε</u> $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in F$

<u>Άσκηση 4</u> Έστω F_1, F_2 κυρτά σύνολα $\subseteq \mathbb{R}^n$

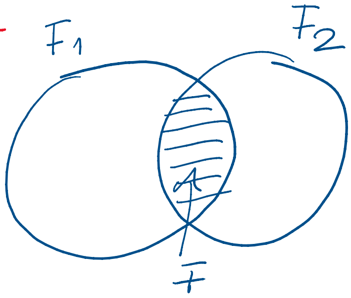
1) $F_1 \cap F_2$ κυρτό ή όχι; (απόδειξη ή αντιπαράδ.)

2) $F_1 \cup F_2$ όμοια

3) Αν $F_1 \subset F_2$ και $B = F_2 \setminus F_1$ κυρτό ή όχι;

<u>Απάντηση</u>

1)



$F = F_1 \cap F_2$ ΘΔΟ $\forall\, x_1, x_2 \in F$, $\forall\, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in F$

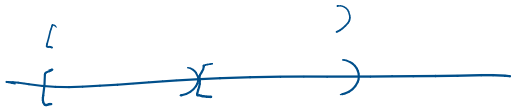
Έστω $x_1, x_2 \in F$, $\lambda \in [0,1]$ $\Rightarrow$ $x_1, x_2 \in F_1$, $x_1, x_2 \in F_2$

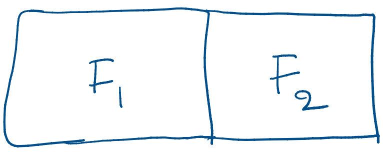
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_1, x_2 \in F_1 \\ F_1 \text{ κυρτό} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in F_1 \\ \left.\begin{array}{l} x_1, x_2 \in F_2 \\ F_2 \text{ κυρτό} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in F_2 \end{array}\right\} \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in F$$

αποδείχθηκε

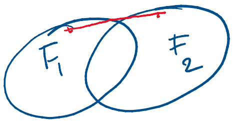
$F_1 \cap F_2$ κυρτό

2

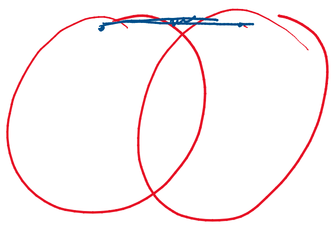




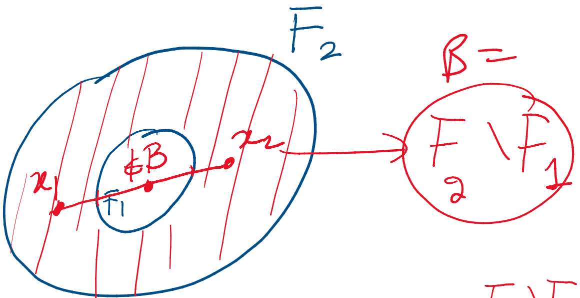
$F_1 \cup F_2$ κυρτό



$F_1 \cup F_2$ όχι κυρτό

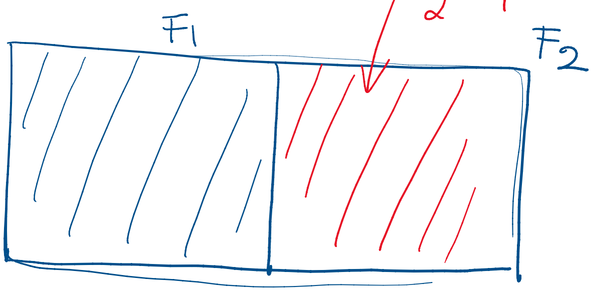


3

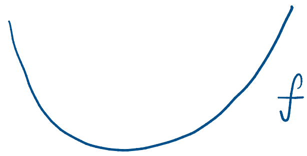


όχι κυρτό

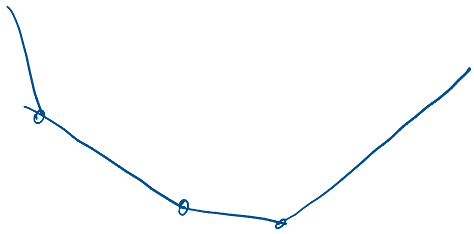
$F_2 \setminus F_1$ κυρτό

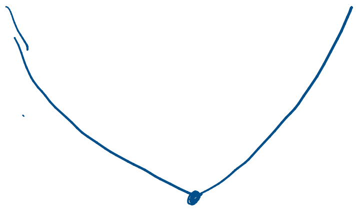


Κυρτές συναρτήσεις



κυρτή
$f''(x) \geq 0$

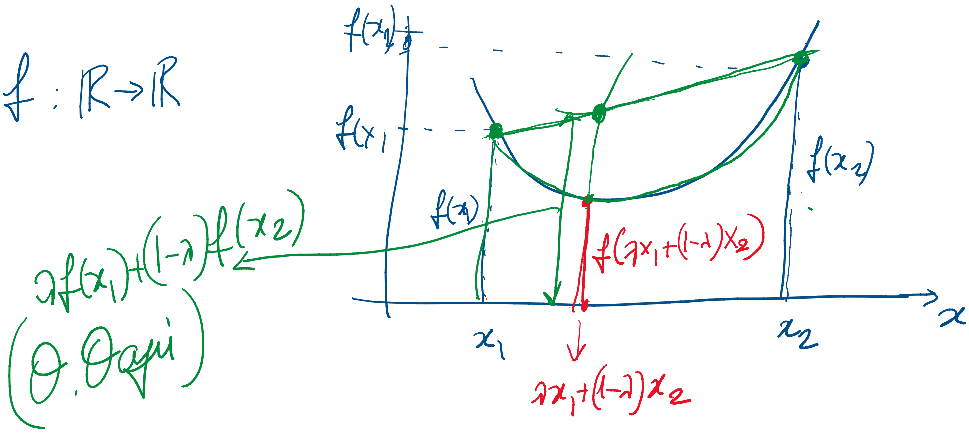


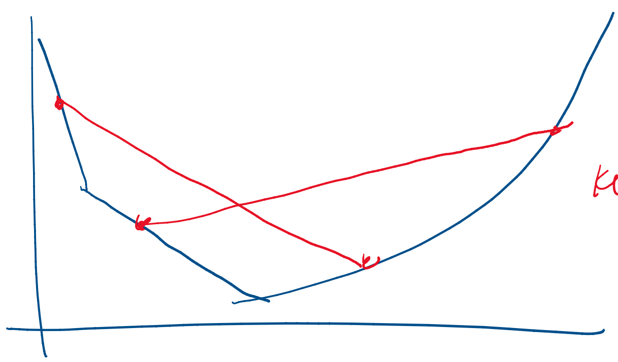


$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτή (κοίλη)

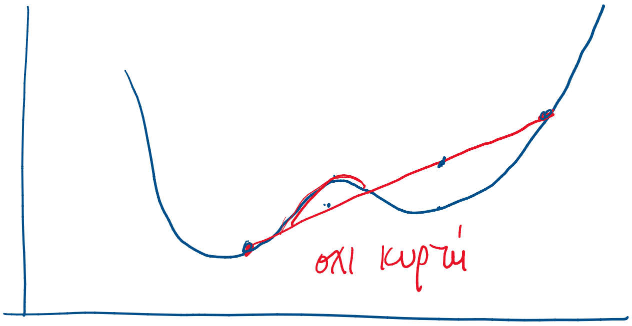
αν $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \lambda \in [0,1]$ $\Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ $(\geq)$

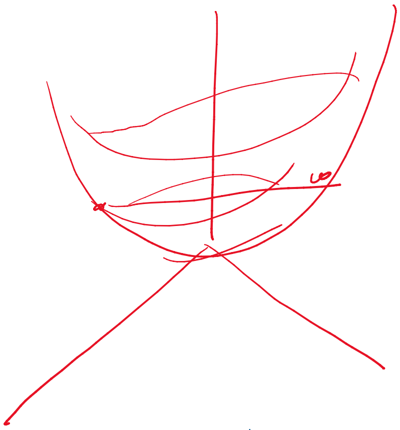
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

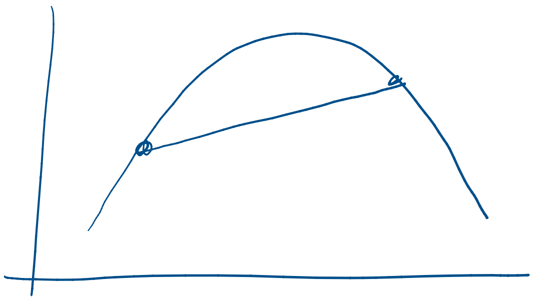




κυρτή







Άσκηση 5

Έστω ΠΓΠ. $z = \max c'x$
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

$c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Θεωρούμε c, A σταθερά αλλά το b μεταβάλλεται

$z : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$: $\underline{z(b)} = \max\{c'x : Ax \le b, x \ge 0\}$

$\boxed{z(b) \text{ κοίλη συνάρτηση του } b}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη

αν $\underline{\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n}$, $\underline{\forall\ \lambda \in [0,1]}$

$$\Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Εδώ θδο $\forall\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}^m$

$\forall\ \lambda \in [0,1]$

$$Z(\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2) \geq \lambda \underbrace{Z(b_1)}_{<\infty} + (1-\lambda) \underbrace{Z(b_2)}_{<\infty}$$