Και ο μήνας έχει εννιά

Lebesgue: Σε χώρους πεπ. μέτρου

$$f_n \xrightarrow{σπ} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{κμ} f$$

<u>Απόδ</u> Αφού $|f_n - f| \to 0$ μ-σχεδόν $\forall x$

$(\forall \epsilon > 0)$ $\quad \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n \geq m} N(n,\epsilon)\right)\right) = 0$

διότι $\bigcup_{\epsilon > 0}\left(\qquad \right) = A$ (που $\mu(A) = 0$).

όμως, $M_m =: \bigcup_{n \geq m} N(n,\epsilon)$ φθίνουσα

άρα, <u>έχοντας</u> $\mu(X) < +\infty$

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} M_m\right) = \lim_{m} \mu(M_m)$$

οπότε $\mu(M_m) \to 0$, όμως $N(m,\epsilon) \subseteq M_m$

οπότε $\mu(N(m,\epsilon)) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

άρα πράγματι, $f_n \xrightarrow{κμ} f$. ▨

Έγοροφ: Όταν $\mu(X) < +\infty$

$$f_n \xrightarrow{\sigma\pi} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\sigma o\mu} f$$

Απόδ. Έχω $f_n \to f$ σπ

οπότε $\forall \epsilon > 0$ (παίρνω $\epsilon = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$)

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{n \geq m} N(n, \tfrac{1}{k})}_{=: M_m}\Big)\Big) = 0$$

οπότε $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mu\Big(\qquad \Big) = 0$$

δυο [illegible] [illegible]

άρα, επειδή $\mu(X) < +\infty$ $\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} M_m\right) = \lim_m \mu(M_m)$

οπότε $\mu(M_m) \to 0$ καθώς $m \to +\infty$

δηλ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mu\left(\bigcup_{n \geq m} N(n, \frac{1}{k})\right) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

$\forall \delta > 0, \forall k \in \mathbb{N} \ \exists m_k$:

$$\mu\Big(\bigcup_{n \geq m_k} N(n, \tfrac{1}{k})\Big) < \frac{\delta}{2^k}$$

ορίζω $A_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n \geq m_k} N(n, \frac{1}{k})\right) \in \mathcal{A}$

οπότε $\mu(A_\delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\bigcup_{n \geq m_k} N(n, \frac{1}{k})\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta$

Ισχυρισμός: $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A_\delta$

Απόδ. Έστω $\epsilon > 0$ θεωρώ $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k} < \epsilon$

$$A_\delta \supseteq \bigcup_{n \geq m_k} N(n, \tfrac{1}{k})$$

άρα αν $x \notin A_\delta$ τότε $x \notin \left(\bigcup \quad \right)$ άρα

$$x \in \bigcap_{n \geq m_k} N(n, \tfrac{1}{k})^c$$

δηλ αν $x \notin A_\delta$ τότε

$\forall n \geq m_k$, $x \in N(n, \frac{1}{k})^c$

" $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$

Σημείωσα ότι $\forall \epsilon > 0 \ \exists m_k = m_k(\epsilon)$ και μόνο έτσι ώστε $\forall x \notin A_\delta$ και $\forall n \geq m_k$ ισχύει

άρα: $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A_\delta^c\} \leq \frac{1}{k}$ $\forall n \geq m_k$

δηλ $f_n \to f$ ομοιόμορφα σε A_δ^c. ∎

Σε χώρους άπειρου μέτρου το συμπέρασμα δεν ισχύει.

Παράδ. $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda)$, $f_n = \chi_{[n,\infty)}$: $f_n \to 0$ σχεδόν παντού

Αλλά δεν μπορώ να βρω σύνολο μικρού μέτρου έξω από το οποίο $f_n \to 0$ ομοιόμορφα

δηλ: Έστω $M_\epsilon \in \mathcal{M}_\lambda$, $\lambda(M_\epsilon) < \epsilon$

δεν ισχύει $f_n|_{M_\epsilon^c} \to 0$ ~~ομοιόμορφα~~

δηλ: ισχ όποιο M_ϵ και να πάρω με $\lambda(M_\epsilon) < \epsilon$

$$s_n = \sup\{|f_n(x) - 0| : x \in M_\epsilon^c\} = 1 \quad \forall n$$

Απόδ (??) $\qquad (\not\to 0)$

Π.χ.: Αν $s_n \neq 1$ τότε $s_n = 0$ (χαρακτηριστική)

Επομένη $f_n(x) = 1$ μόνο όταν $x \in M_\epsilon$

$$\begin{array}{c} f_n(x) \\ \| \\ \chi_{[n,\infty)}(x) \end{array}$$

δηλ $[n,\infty) \subseteq M_\epsilon$

ενώ $\lambda(M_\epsilon) < \epsilon$

άτοπο.

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \overset{?}{\Longrightarrow} f_n \xrightarrow{\sigma.\pi.} f$$

ΟΧΙ Πρβλ. οι χαρακτηριστικές τα $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$

$\forall \epsilon>0$

$$\mu\Big(\underbrace{\{x : |f_n(x)-f(x)| \geq \epsilon\}}_{= \mu(N(n,\epsilon))}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} f_n \xrightarrow{\mu} f$$

Πρόταση $f_n \xrightarrow{\mu} f \Rightarrow \exists$ υπακ. (f_{n_k}) της f_n: $f_{n_k} \xrightarrow{\sigma.\pi.} f$

Απόδ. Ξέρω

Μπορώ να επιλέξω $n_1 < n_2 < \cdots$

$$\mu\left(N\left(n, \frac{1}{2^k}\right)\right) < \frac{1}{2^k} \quad \forall n \geq n_k$$

Ονομάζω $F = \limsup_k N\left(n_k, \frac{1}{2^k}\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k\geq m} N\left(n_k, \frac{1}{2^k}\right)\right)$

Έχω $\mu\left(\bigcup_{k\geq m} N\left(n_k, \frac{1}{2^k}\right)\right) \leq \sum_{k\geq m} \mu\left(N\left(n_k, \frac{1}{2^k}\right)\right)$

$$\leq \sum_{k\geq m} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

οπότε $\mu(F) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup \cdots\right)\right) = 0$

Θέτω $E = F^c$ είναι μετρήσιμο με $\mu(E^c) = 0$

Ισχυρίζομαι $\forall x \in E$, $f_{n_k}(x) \to f(x)$

Έστω $x \in E$: $x \notin \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k\geq m} N\left(n_k, \frac{1}{2^k}\right)\right)$

$\Rightarrow \exists m : x \notin \bigcup_{k\geq m} N\left(n_k, \frac{1}{2^k}\right)$

άρα $\exists m : \forall k \geq m \ x \notin N\left(n_k, \frac{1}{2^k}\right)$

δηλ.

$\exists m : \forall k \geq m \ |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k}$

οπότε η $f_{n_k}(x) \to f(x)$. ∎

Όλη μετρικότητα:

Πόρισμα: Αν $f_n \longrightarrow f$ κατά μέτρο και $f_n \longrightarrow g$ " $\Big\} \Rightarrow$ $\underline{f=g \text{ σπ}}$

Απόδ. $\exists\, (f_{k_n})$ υπακ. της (f_n): $f_{k_n} \longrightarrow f$ σπ

Αλλά, αφού $f_{k_n} \longrightarrow g$ κατά μέτρο

$\exists\, (f_{k_{m_n}})$ υπακ. της (f_{k_n})

: $f_{k_{m_n}} \longrightarrow g$ σπ

οπότε η $f_{k_{m_n}} \longrightarrow f$ σπ

και $f_{k_{m_n}} \longrightarrow g$ σπ $\Big\}$ $\overset{\text{έχουμε δείξει}}{\Longrightarrow}$ $f=g$ σπ. ∎

Ερώτ. Είναι άραγε αληθές ότι αν $f_n \longrightarrow f$ σπ τότε κάθε υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) $f_{k_n} \longrightarrow f$ σπ ??

Τι θα πει $f_n \longrightarrow f$ σπ;

θα πει $\exists\, A \in \mathcal{A}$, $\mu(A)=0$ τ.ω

$\forall\, x \notin A$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$

όμως, $(f_n(x))$ είναι ακολουθία στο $\mathbb{R}$

κάθε υπακολουθία

$(f_{k_n}(x))$ της $(f_n(x))$

συγκλίνει στο ίδιο αριθμό $f(x)$

άρα πράγματι $f_{k_n}(x) \longrightarrow f(x)$ $\forall\, x \notin A$

και $\mu(A)=0$ ∎

Άλλη απόδειξη ότι αν $\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\mu} f \\ f_n \xrightarrow{\mu} g \end{array}\right\} \Rightarrow f = g$ σπ
(δες μοναδικότητα) και

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \tfrac{1}{k}\}$$

άρα

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \tfrac{1}{k}\})$$

όμως αν $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/2$ και $|g(x) - f_n(x)| < \epsilon/2$

τότε $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ (τριγωνική)

άρα $\{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\} \subseteq \{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon/2\} \cup$

$\cup \{x : |g(x) - f_n(x)| \geq \epsilon/2\}$

$\rightarrow$ άρα $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}\}) \leq \mu(\{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2k}\})$
$+$
$\mu(\{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2k}\}$

Όμως, $\forall \epsilon > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ μπορώ $n_k \in \mathbb{N}$!
$\mu(\{x : |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{2k}\}) < \frac{\epsilon}{2k^2}$

και $\mu(\{x : |g(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{2k}\}) < \frac{\epsilon}{2k^2}$

$\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{k}) < \frac{\epsilon}{k^2}$

άρα:

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \tfrac{1}{k}\})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{k^2} < 17\epsilon. \quad \forall \epsilon > 0$$

άρα $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ άρα $f = g$ μ-σπ.