Θεωρία Μέτρου: Ασκήσεις 4

Άσκηση 4.1 (KN:5-1) Έστω $(\Omega, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος. Αν μια $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ ικανοποιεί $[f \leq q] \in \mathcal{S}$ για κάθε ρητό q, να αποδειχθεί ότι η f είναι μετρήσιμη.

Άσκηση 4.2 (KN:5-2) Δώστε παράδειγμα $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμη, αλλά οι $|f|$ και f^2 είναι Lebesgue μετρήσιμες.

Άσκηση 4.3 (KN:5-3) Έστω $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε το σύνολο $[f \neq g] = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ να είναι μ-μηδενικό. Αν η f είναι μ-μετρήσιμη, δείξτε ότι η g είναι και αυτή μ-μετρήσιμη.

Άσκηση 4.4 (KN:5-4) Έστω $(\Omega, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{S}$-μετρήσιμη. Θέτουμε

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } f(x) \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η g είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμη.

Άσκηση 4.5 (KN:5-5) Έστω $(\Omega, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής (ή, γενικότερα, Borel μετρήσιμη), να δειχθεί ότι η σύνθεση $\phi \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Άσκηση 4.6 (KN:5-7) Αποδείξτε ότι το σύνολο A των σημείων ενός μετρήσιμου χώρου $(\Omega, \mathcal{S})$ στα οποία μια ακολουθία f_n μετρησίμων συναρτήσεων συγ-κλίνει (δηλαδή, $A = \{x \in \Omega : \text{ το όριο } \lim_n f_n(x) \text{ υπάρχει } \}$) είναι μετρήσιμο σύνολο.

Άσκηση 4.7 (KN:–) Αν $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση, είναι αλήθεια ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n) ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$; (βλ. και Άσκ. 5.1)