# Υπενθύμιση: Εναλλαγή ορίου και αθροίσματος

**1. Μονότονες ακολουθίες** *Αν* $b_{nk} \in \mathbb{R}_+$ *και* $b_{n,k} \leq b_{n+1,k}$ *για κάθε* $k$, *τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} b_{nk}$$

**Απόδειξη** Θέτω

$$b_k = \sup_n b_{nk} = \lim_n b_{nk} \in [0, +\infty]$$

και θα δείξω ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\forall n, \forall k \qquad b_{nk} \leq b_k \\
\Rightarrow &\forall n, \forall K \qquad \sum_{k=1}^{K} b_{nk} \leq \sum_{k=1}^{K} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \\
\Rightarrow &\forall n, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \\
\Rightarrow &\qquad \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.
\end{aligned}$$

Αλλά

$$\forall K, \quad \sum_{k=1}^{K} b_k = \sum_{k=1}^{K} \lim_n b_{nk} = \lim_n \sum_{k=1}^{K} b_{nk} = \sup_n \sum_{k=1}^{K} b_{nk} \leq \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}$$

και συνεπώς ισχύει ισότητα.

**2. Παράδειγμα** *Η υπόθεση της μονοτονίας δεν μπορεί να παραλειφθεί: Έστω*

$$b_{nk} = \begin{cases} 1, & n \leq k \\ 0, & n > k \end{cases}$$

$$\text{Έχουμε} \quad \forall k, \quad \lim_{n\to\infty} b_{nk} = 0 \quad \text{άρα} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} b_{nk} = 0$$

$$\text{Αλλά} \quad \forall n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = \sum_{k=n}^{\infty} b_{nk} = 1 + 1 + \ldots = +\infty$$

$$\text{άρα} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = +\infty.$$

**3. Σειρές θετικών όρων** *Αν* $a_{ij} \geq 0$, *τότε*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mk}.$$

**Απόδειξη** Θέτω $b_{nk} = \sum_{m=1}^{n} a_{mk}$. Τότε $b_{nk} \leq b_{n+1,k}$ για κάθε $k$ και $\lim_{n\to\infty} b_{nk} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mk}$, οπότε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mk} &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} b_{nk} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} a_{mk} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}.\end{aligned}$$

**4. Απόλυτα συγκλίνουσες σειρές** *Αν* $\sum\sum |x_{nk}| < \infty$ *(δηλαδή* $\sup\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} |x_{nk}| : N, K \in \mathbb{N}\} < \infty$*), τότε οι σειρές* $\sum_n \sum_k x_{nk}$ *και* $\sum_k \sum_n x_{nk}$ *συγκλίνουν και μάλιστα στο ίδιο όριο.*

**Απόδειξη** Από την υπόθεση, αν $A$ είναι ένα άνω φράγμα όλων των αθροισμάτων $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} |x_{nk}|$, τότε για κάθε $i$ έχουμε $\sum_{k=1}^{K} |x_{ik}| \leq A$ άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_{ik}$ συγκλίνει (απόλυτα), έστω στο $y_i$ και για κάθε $N$ έχουμε $\sum_{i=1}^{N} |y_i| \leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} |x_{ik}| \leq A$ άρα και η σειρά $\sum_i y_i$ συγκλίνει απόλυτα.

Έστω $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Από την προηγούμενη παράγραφο, ορίζονται οι

$$f_i(\frac{1}{n}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}, \qquad f_i(0) = y_i = \sum_{k=1}^{\infty} x_{ik} \qquad \text{και} \;\; g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in E).$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $i \in \mathbb{N}$, $\lim_n f_i(\frac{1}{n}) = f_i(0)$. Θα δείξω ότι $\lim_n g(\frac{1}{n}) = g(0)$.

Αν $a_i = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{ik}|$ έχουμε $|f_i(x)| \leq a_i$ για κάθε $i$ και για κάθε $x \in E$ άρα

$$\left| g(x) - \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \right| = \left| \sum_{i=m+1}^{\infty} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i.$$

Αλλά $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_i \sum_k |x_{ik}| < +\infty$, άρα $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=m+1}^{\infty} a_i = 0$. Επομένως αν δοθεί $\varepsilon > 0$ και επιλέξω $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i < \varepsilon$, τότε

$$\left| g(x) - \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \right| < \varepsilon$$

για κάθε $x \in E$. Άρα

$$\begin{aligned} \left| g(0) - g(\frac{1}{n}) \right| &\leq \left| g(0) - \sum_{i=1}^{m} f_i(0) \right| + \left| \sum_{i=1}^{m} f_i(0) - \sum_{i=1}^{m} f_i(\frac{1}{n}) \right| + \left| \sum_{i=1}^{m} f_i(\frac{1}{n}) - g(\frac{1}{n}) \right| \\ &< 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \left| f_i(0) - f_i(\frac{1}{n}) \right| \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Διαλέγοντας τώρα $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $\left| f_i(0) - f_i(\frac{1}{n}) \right| < \frac{\varepsilon}{m}$ για κάθε $n \geq n_o$, έχουμε $\left| g(0) - g(\frac{1}{n}) \right| < 3\varepsilon$ για κάθε $n \geq n_o$. Άρα τελικά

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_{ik} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(0) = g(0) = \lim_m g(\frac{1}{m}) \\ = \lim_m \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\frac{1}{m}) = \lim_m \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} x_{ik} \\ = \lim_m \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} x_{ik} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_{ik}. \end{aligned}$$