ΕΠΑΓΩΓΗ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκ. 1 $\sum_{k=1}^{n} k := 1+2+\cdots+(n-1)+n \overset{\circledast}{=} \frac{n(n+1)}{2}$.

Απόδ. Έστω

$$S = \{n \in \mathbb{N} : \text{ισχύει η } \circledast\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Θδο $S = \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας το (Φ3):

(i) Παρατηρούμε ότι:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

άρα $1 \in S$.

(ii) Έστω $n \in S$, δηλ. για το n αυτό, ισχύει η $\circledast$.
Θδο $n+1 \in S$:

$$n \in S \Rightarrow 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Αφού ισχύουν οι (i) και (ii) $\overset{(\Phi 3)}{\Longrightarrow}$ $S = \mathbb{N}$.

Ασκ. 2 $\sum_{k=1}^{n} k^2 \overset{\circledast}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Απόδ. Όπως και στην προηγούμενη Ασκ. 1, αρκεί νδο η $\circledast$ ισχύει για το $n=1$, και αν ισχύει για n τότε ισχύει και για $n+1$. Πράγματι:

Για $n=1$: $1^2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{6}$, ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$1+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow$$

$$1+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Άσκ. 3 ΝΔο

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

δηλ:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Απόδ. Για $n=1$: $1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2$, ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για $n\in\mathbb{N}$. Τότε:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right) =$$

$$= (n+1)^2\,\frac{n^2+4n+4}{4} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Άσκ. 4

$\phi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $\uparrow$ $\Rightarrow \phi(n)\geq n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Απόδ. Με επαγωγή:
Για $n=1$: $\phi(1)\geq 1$, ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n\in\mathbb{N}$, δηλ. $\phi(n)\overset{(*)}{\geq} n$.
ΘΔο $\phi(n+1)\geq n+1$.

$$n+1>n \underset{\phi\uparrow}{\Longrightarrow} \phi(n+1)>\phi(n)\overset{(*)}{\geq} n \Rightarrow \phi(n+1)>n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(n+1)\geq n+1.$$

Ασκ 5 ΝΔο $3 \mid (n^3-n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αποδ.

Για $n=1$: $3 \mid 1^3-1 \iff 3 \mid 0$, ισχύει.

Έστω ότι $3 \mid (n^3-n)$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. ΘΔο $3 \mid ((n+1)^3-(n+1))$.

Πράγματι:

$3 \mid (n^3-n) \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} : n^3-n=3k \Rightarrow$

$$\Rightarrow (n+1)^3-(n+1) = n^3+3n^2+3n+\cancel{1}-n-\cancel{1} =$$
$$= n^3-n+3(n^2+n) =$$
$$= 3k+3(n^2+n) =$$
$$= 3\underbrace{(k+n^2+n)}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3 \mid ((n+1)^3-(n+1))$.

Ασκ 6 ΝΔο n^5-n είναι πολλ/σιο (ακέραιο) του 5, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αποδ.

Για $n=1$: $1^5-1=0=5\cdot 0$, ισχύει.

Έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$: $n^5-n=5a$, $a \in \mathbb{Z}$.

ΘΔο $(n+1)^5-(n+1)$ είναι (ακέραιο) πολλ/σιο του 5, δηλ. ΘΔο $\exists\, b \in \mathbb{Z} : (n+1)^5-(n+1)=5b$.

Πράγματι:

$$(n+1)^5-(n+1) = n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+\cancel{1}-n-\cancel{1} =$$
$$=(n^5-n)+5(n^4+2n^3+2n+1) =$$
$$= 5a+5(n^4+2n^3+2n+1) =$$
$$= 5\cdot\underbrace{(a+n^4+2n^3+2n+1)}_{\in \mathbb{Z}}.$$

(E4)

7 ΝΔο $133 \mid (11^{n+1} + 12^{2n-1}),\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Αποδ

$n=1$: $133 \mid (11^2 + 12) = 121 + 12 = 133$

Εστω ότι $133 \mid (11^{n+1} + 12^{2n-1})$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. ΘΔο $133 \mid (11^{n+2} + 12^{2n+1})$. Πράγματι:

$$11^{n+1} + 12^{2n-1} = k \cdot 133, \quad k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11 \cdot (11^{n+1} + 12^{2n-1}) - 11 \cdot 12^{2n-1} + 12^{2n+1}$$

$$= 11 \cdot (133 \cdot k) + 12^{2n-1}(12^2 - 11)$$

$$= \underbrace{133} \cdot (11k) + 12^{2n-1} \cdot \underbrace{133} = 133 \, (\underbrace{11k + 12^{2n-1}}_{\in \mathbb{N}}).$$

8 $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Αποδ

$n=1$: $1 \cdot 1! = 1 \overset{?}{=} 2! - 1 = 2 - 1 = 1$. ✓

Εστω $n \in \mathbb{N}$: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$. ΘΔο

$1 \cdot 1! + \dots + n \cdot n! + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$.

Πράγματι:

$$[1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!] + (n+1) \cdot (n+1)! = [(n+1)! - 1] + (n+1) \cdot (n+1)! =$$

$$= (n+1)!\,(\underbrace{1 + n + 1}_{n+2}) - 1 = (n+2)! - 1.$$

Ασκ 9

Για ποιές τιμές του $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες;

(i) $2^n > n^3$

Παρατηρούμε ότι:

$n=1 \rightsquigarrow 2 > 1$ ✓

$n=2 \rightsquigarrow 4 > 8$ όχι

$n=3 \rightsquigarrow 8 > 27$ όχι

$n=4 \rightsquigarrow 16 > 64$ όχι

$n=5 \rightsquigarrow 32 > 125$ όχι

$n=6 \rightsquigarrow 64 > 216$ όχι

$n=7 \rightsquigarrow 128 > 343$ όχι

$n=8 \rightsquigarrow 256 > 512$ όχι

$n=9 \rightsquigarrow 512 > 729$ όχι

$n=10 \rightsquigarrow 1024 > 1000$ ✓

Έστω τώρα ότι $2^n > n^3 \Rightarrow$
$(n \geq 10)$

$$\Rightarrow 2^{n+1} > 2n^3 = n^3 + n^3 \geq n^3 + 10n^2 =$$
$$= n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 4n^2 >$$
$$> n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3. \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)^3$$

(ii) $2^n > n^2$

Παρατηρούμε ότι

$n=1 \rightsquigarrow 2 > 1$ ✓

$n=2 \rightsquigarrow 4 > 4$ όχι

$n=3 \rightsquigarrow 8 > 9$ όχι

$n=4 \rightsquigarrow 16 > 16$ όχι

$n=5 \rightsquigarrow 32 > 25$ ✓

Έστω ότι $2^n > n^2$ με $n \geq 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^{n+1} > 2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 5n =$$

$$= n^2 + 2n + 3n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)^2.$$

(iii) $2^n > n$

Παρατηρούμε ότι

$n = 1 \leadsto 2 > 1$ ✓

$n = 2 \leadsto 4 > 2$ ✓

$n = 3 \leadsto 8 > 3$ ✓

και

$$2^n > n \Rightarrow 2^{n+1} > 2n = n + n \geq n + 1.$$

Άρα η ανισότητα $2^n > n$ ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) $n! > 2^n$.

Παρατηρούμε

$n = 1 \leadsto 1 > 2$ όχι

$n = 2 \leadsto 2 > 4$ όχι

$n = 3 \leadsto 6 > 8$ όχι

$n = 4 \leadsto 24 > 16$ ✓

και

$$n! > 2^n \Rightarrow (n+1)! = n!(n+1) > 2^n(n+1) >$$

(για $n \geq 4$) $$> 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

Άρα

$n! > 2^n \quad \forall n \geq 4.$

(10) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Απόδ

$n=1: \quad \frac{1}{1^2}=1 \leq 2-\frac{1}{1}=1 \quad \checkmark$

Έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$

Θδο $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \leq 2-\frac{1}{n+1}.$

Πράγματι:

$$\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right]+\frac{1}{(n+1)^2} \leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}=$$

$$=2-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}+\frac{n}{n(n+1)^2}=$$

$$=2-\frac{n^2+2n+1-n}{n(n+1)^2}=$$

$$=2-\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \overset{(*)}{\underset{;}{\leq}} 2-\frac{1}{n+1}$$

$$(*) \iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \iff$$

$$\iff n(n+1) \leq n^2+n+1 \iff n^2+n \leq n^2+n+1 \quad \checkmark.$$

(11) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

E8

Απόδ

$n=1$: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \sqrt{3} < 2 \iff 3 < 4$ ✓

Έστω ότι, για κάποιο $n\in\mathbb{N}$, ισχύει $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Θδο $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$

Πράγματι:

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2(n+1)} \underset{(*)}{\overset{?}{<}} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$

$(*) \iff \sqrt{(2n+1)(2n+3)} < 2n+2$

$\iff 4n^2+8n+3 < 4n^2+8n+4$ ✓.

(12) $2(\sqrt{n+1}-1) \leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$n=1$: $2(\sqrt{2}-1) \leq 1 \leq 2-1=1$

ok.

$2\sqrt{2}-2 \leq 1$

$\Updownarrow$

$2\sqrt{2} \leq 3$

$\Updownarrow$

$8 \leq 9$

ok.

Έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$:

$$2(\sqrt{n+1}-1) \leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1.$$

Θδο $2(\sqrt{n+2}-1) \leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}-1.$

Πράγματι:

$$2(\sqrt{n+1}-1) \leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1 \Rightarrow$$

$$2(\sqrt{n+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{(**)}{\leq} 2\sqrt{n+1}-1$$

$\overset{(*)}{\geq}$

$2(\sqrt{n+2}-1)$

$$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{n+1}-\cancel{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n+2}-\cancel{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 2(\sqrt{(n+1)(n+2)}-(n+1)) =$$

$$= 2\sqrt{(n+1)(n+2)}-2n-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n+3 \geq 2\sqrt{n^2+3n+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n^2+12n+9 \geq 4n^2+12n+8 \quad ✓$$

$$(**) \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \Leftrightarrow 1 \leq 2(n+1-\sqrt{n(n+1)})$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2n+2-2\sqrt{n^2+n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n^2+n} \leq 2n+1$$

$$\Leftrightarrow 4n^2+4n \leq 4n^2+4n+1. \quad ✓$$

(13) $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 2^{n-1} (n!)^2 \leq (2n)! \leq 2^{2n-1} \cdot (n!)^2$

Αποδ

$n=1: \quad 1 \cdot 1 \cdot 1 \leq 2! = 2 \leq 2 \cdot 1$ ✓

Έστω $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 2^{n-1} (n!)^2 \leq (2n)! \leq 2^{2n-1} \cdot (n!)^2 \Rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 2^{n-1} (n!)^2 (2n+1)(2n+2) \leq (2(n+1))! \leq 2^{2n-1} (n!)^2 (2n+1)(2n+2)$.

Θδο

$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 2^{n-1} (n!)^2 (2n+1)(2n+2) \overset{?}{\geq} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot 2^{n} \cdot ((n+1)!)^2 \iff$

$\sqrt{n+1} \cdot 2^{n} (n!)^2 (2n+1)(n+1) \geq \sqrt{n} \cdot 2^{n} (n!)^2 (n+1)^{\cancel{2}} \iff$

$\sqrt{n+1} \, (2n+1) \geq \sqrt{n} \, (n+1) \iff$

$(n+1)(4n^2+4n+1) \geq n(n^2+2n+1) \iff$

$4n^3 + 4n^2 + n + 4n^2 + 4n + 1 \geq n^3 + 2n^2 + n$ ✓

$2^{2n-1} (n!)^2 (2n+1)(2n+2) \underset{?}{\leq} 2^{2n+1} \cdot ((n+1)!)^2 = 2^{2n+1} (n!)^2 (n+1)^2 \iff$

$2^{2n} (n!)^2 (2n+1)(n+1) \leq 2^{\cancel{2n+1}} (n!)^2 (n+1)^2 \iff$

$(2n+1)(n+1) \leq 2(n+1)^2 \iff$

$2n^2 + 3n + 1 \leq 2n^2 + 4n + 2$ ✓