Απειροστικός Λογισμός 1
Πέμπτη 21 Ιανουαρίου 2022
Κλιμάκιο 2, Ώρα 12:00–14:00

Θέμα 1. (2.5 μον.)

(α) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά και φραγμένα. Θέτουμε $A+B := \{a+b : a \in A \text{ και } b \in B\}$. Δείξτε ότι $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

(β) Βρείτε τα supremum, infimum, μέγιστο και ελάχιστο (αν υπάρχουν) των συνόλων:

$$A = \left\{2 + \frac{(-1)^n}{n^4} : n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : -1 < x < \sqrt{2}\}.$$

Θέμα 2. (3 μον.)

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\alpha_n = \frac{2^n \, n!}{n^n}, \;\; \beta_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n/3}, \;\; \gamma_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2},$$

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Θέμα 3. (2 μον.)

Δείξτε ότι κάθε αύξουσα και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Θέμα 4. (2.5 μον.)

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα τη συνάρτηση $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με $f(x) = x$ αν $x \in \mathbb{Q}$, και $f(x) = x + x^3$ αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Θέμα 5. (2.5 μον.)

(α) Έστω $f \colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{x^3}$ για κάθε $x \geq 1$. Δείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} [f(x + x^2) - f(x)] = 0$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, αν $a_1, \ldots, a_n > 0$ τότε

$$(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + (a_1 + \cdots + a_n) + (a_1 \cdots a_n).$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!