

Απειροστικός Λογισμός Ι – Πρόοδος
20 Νοεμβρίου 2021

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός Μητρώου:

1. (1.5+1.5=3 μον.)

(α) Διατυπώστε και αποδείξτε τον ε -χαρακτηρισμό του supremum ενός άνω φραγμένου υποσυνόλου του \mathbb{R} .

(β) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_n > 0$. Δείξτε ότι $(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 \cdots a_n$.

2. (3 μον.)

Να βρεθούν τα \sup , \inf , \max και \min (αν αυτά υπάρχουν) των συνόλων

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{2^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x \leq \sqrt{2}\}.$$

3. (3 μον.)

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες

$$\alpha_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \quad \beta_n = (\sqrt[n]{2n} - 1)^n, \quad \gamma_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{2n},$$

$$\delta_n = \frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!} + \cdots + \frac{n}{(2n)!}.$$

4. (1 μον.)

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $|x - y| < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι $x = y$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!