

Απειροστικός Λογισμός Ι – 3ο Τεστ
6 Νοεμβρίου 2017

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός Μητρώου:

1. (4 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $a_n \in \mathbb{Q}$ και $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ τότε $a \in \mathbb{Q}$.

(β) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \rightarrow +\infty$.

(γ) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \rightarrow 0$, τότε $a_n^n \rightarrow 0$.

(δ) Αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που ικανοποιούν την $a_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, τότε $a_n \rightarrow x$.

2. (3 μον.) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + 100^n}, \quad \beta_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad \gamma_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (2 μον.) Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) που ορίζεται από τις $x_1 = \frac{1}{2}$ και

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους της (x_n) . Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι μονότονη και φραγμένη. Ποιό είναι το όριό της;

4. (2 μον.) Αποδείξτε ότι η ακολουθία $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα αν η (y_n) είναι μονότονη.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 3ο Τεστ
9 Νοεμβρίου 2017

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός Μητρώου:

1. (4 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η (a_n) έχει θετικούς όρους και είναι γνησίως αύξουσα, τότε $a_n \rightarrow +\infty$.

(β) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \rightarrow 1$, τότε $a_n^n \rightarrow 1$.

(γ) Αν $a_n \rightarrow 0$ τότε η $(|a_n|)$ είναι φθίνουσα.

(δ) Αν η (a_n) είναι φραγμένη τότε και η (a_n^2) είναι φραγμένη.

2. (3 μον.) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}, \quad \beta_n = \frac{1}{n(\sqrt{n^2 + 1} - n)}, \quad \gamma_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (2 μον.) Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) που ορίζεται από τις $x_1 = 1$ και

$$x_{n+1} = \frac{6}{5 - x_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους της (x_n) . Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι μονότονη και φραγμένη. Ποιό είναι το όριό της;

4. (2 μον.) Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε

$$a_n b_n \rightarrow 1 \quad \text{και} \quad a_n + b_n \rightarrow 2.$$

Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow 1$ και $b_n \rightarrow 1$.

Υπόδειξη: Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$.