Απειροστικός Λογισμός Ι – 2ο Τεστ
16 Οκτωβρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος ρητοί $q \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιούν την $x < q < y$.

(β) Έστω A, B μη κενά, κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $A \subseteq B$. Τότε, $\inf A \leqslant \inf B$.

(γ) Το σύνολο $\left\{1 - \frac{1}{2n} : n \geqslant 1\right\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

(δ) Έστω $\Delta \subset (0, +\infty)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in \Delta$ υπάρχει $y \in \Delta$ τέτοιος ώστε $y < \frac{x}{2}$. Τότε, $\inf \Delta = 0$.

Υπόδειξη. (α) Σωστό. (β) Λάθος. (γ) Σωστό. (δ) Σωστό.

2. (2.5 μον.) Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει η ανισότητα

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Υπόδειξη. Για $n = 1$ πρέπει να ελέγξουμε ότι $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}}$, το οποίο ισχύει ως ισότητα.

Υποθέτουμε ότι $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ και θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+4}}.$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση γράφουμε

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$, που είναι ισοδύναμη με την $\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}}$. Ελέγξτε ότι αυτή ισχύει, υψώνοντας στο τετράγωνο και κάνοντας πράξεις.

3. **(2.5 μον.)** Θεωρούμε το σύνολο $K = \left\{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^3} : m, n = 1, 2, \ldots\right\}$. Να βρεθεί το $\inf K$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας τον ε-χαρακτηρισμό του infimum.

Υπόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\inf K = 0$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $m, n \geqslant 1$ ισχύει $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^3} > 0$, άρα ο 0 είναι κάτω φράγμα του K.

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε στοιχείο του K που είναι μικρότερο από ε: από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, και αν θεωρήσουμε τον $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ ο οποίος ανήκει στο K (γιατί;) έχουμε

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Από τον ε-χαρακτηρισμό του infimum έπεται ότι $0 = \inf K$.

4. **(2 μον.)** Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $a_1, \ldots, a_n \in (0,1)$ τότε

$$1 - (a_1 + \cdots + a_n) \leqslant (1 - a_1) \cdots (1 - a_n).$$

Υπόδειξη. Για $n = 1$ ελέγχουμε ότι $1 - a_1 \leqslant 1 - a_1$ (ισχύει ως ισότητα).

Έστω τώρα ότι η ανισότητα ισχύει για οποιουσδήποτε n αριθμούς στο $(0,1)$ και ας υποθέσουμε ότι $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in (0,1)$. Θα δείξουμε ότι

$$1 - (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}) \leqslant (1 - a_1) \cdots (1 - a_n)(1 - a_{n+1}).$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε, ξεκινώντας από το δεξιό μέλος,

$$\begin{aligned}
(1 - a_1) \cdots (1 - a_n)(1 - a_{n+1}) &\geqslant (1 - (a_1 + \cdots + a_n))(1 - a_{n+1}) \\
&= 1 - (a_1 + \cdots + a_n) - a_{n+1} + (a_1 + \cdots + a_n)a_{n+1} \\
&> 1 - (a_1 + \cdots + a_n) - a_{n+1} \\
&= 1 - (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}).
\end{aligned}$$

Απειροστικός Λογισμός Ι – 2ο Τεστ
19 Οκτωβρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω A μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$. Τότε, $\inf A \in A$.

(β) Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A = \inf B$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ τέτοια ώστε $b - a < \varepsilon$.

(γ) Το σύνολο $\Gamma = \left\{ \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} : n \geqslant 1 \right\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

(δ) Έστω B φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με άπειρα στοιχεία. Τότε, για κάθε $x \in B$ ισχύει $\inf B < x < \sup B$.

Υπόδειξη. (α) Σωστό. (β) Σωστό. (γ) Λάθος. (δ) Λάθος.

2. (2.5 μον.) Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει η ανισότητα

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2.$$

Υπόδειξη. Για $n = 1$ πρέπει να ελέγξουμε ότι $1 \geqslant 2\sqrt{2} - 2$, δηλαδή $3 > 2\sqrt{2}$. Αυτή ισχύει (υψώνοντας στο τετράγωνο ζητάμε ισοδύναμα την $9 > 8$).

Υποθέτουμε ότι $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2$ και θα δείξουμε ότι

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2\sqrt{n+2} - 2.$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση γράφουμε

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2\sqrt{n+2} - 2$, που είναι ισοδύναμη με την

$$2\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$ έχουμε

$$2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 2\frac{n+2-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

δηλαδή το ζητούμενο.

3. (2.5 μον.) Θεωρούμε το σύνολο $K = \left\{\frac{2m}{3m+n} : m, n = 1, 2, \dots\right\}$. Να βρεθεί το $\sup K$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας, χρησιμοποιώντας τον ε-χαρακτηρισμό του supremum.

Υπόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\sup K = \frac{2}{3}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $m, n \geqslant 1$ ισχύει $\frac{2m}{3m+n} < \frac{2m}{3m} = \frac{2}{3}$, άρα ο $\frac{2}{3}$ είναι άνω φράγμα του K.

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε στοιχείο του K που είναι μεγαλύτερο από $\frac{2}{3} - \varepsilon$: συγκεκριμένα, επιλέγουμε $n = 1$ και ζητάμε $m \geqslant 1$ τέτοιον ώστε $\frac{2m}{3m+1} > \frac{2}{3} - \varepsilon$. Ισοδύναμα,

$$\varepsilon > \frac{2}{3} - \frac{2m}{3m+1} = \frac{2}{3(3m+1)}.$$

Αρκεί να επιλέξουμε τον m αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει $3m + 1 > \frac{2}{3\varepsilon}$, δηλαδή $m > \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3\varepsilon} - 1\right)$. Τέτοιος m υπάρχει από την Αρχιμήδεια ιδιότητα.

Από τον ε-χαρακτηρισμό του supremum έπεται ότι $\frac{2}{3} = \sup K$.

4. (2 μον.) Δίνονται $a_1, \dots, a_n > 0$ τέτοιοι ώστε $a_1 + \cdots + a_n \leqslant 1$. Αποδείξτε ότι:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant n^2 \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - a_k}{a_k} \geqslant n \sum_{k=1}^{n} (1 - a_k).$$

Υπόδειξη. Για την πρώτη ανισότητα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_k c_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)$$

με $b_k = \frac{1}{\sqrt{a_k}}$ και $c_k = \sqrt{a_k}$ γράφουμε

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}} \cdot \sqrt{a_k}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right),$$

και έπεται το ζητούμενο διότι $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant 1$.

Για τη δεύτερη ανισότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - a_k}{a_k} &\geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - a_k}{a_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_k} - 1\right)\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) - n\right] = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) - n\sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\geqslant n^2 - n\sum_{k=1}^{n} a_k = n\left(n - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) = n\sum_{k=1}^{n}(1 - a_k).
\end{aligned}$$