Απειροστικός Λογισμός Ι – 1ο Τεστ
2 Οκτωβρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι 1-1. Τότε, η f είναι γνησίως μονότονη.

(β) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $|f(x)| \leqslant g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

(γ) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(a) < 0$. Αν υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$, τότε $f(b) > 0$.

(δ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f δεν είναι 1-1 τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

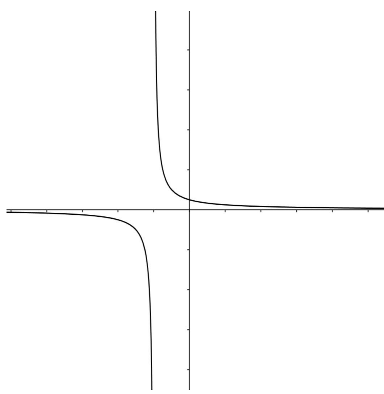
2. **(2 μον.)** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{\text{ημ}(\pi x)}$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

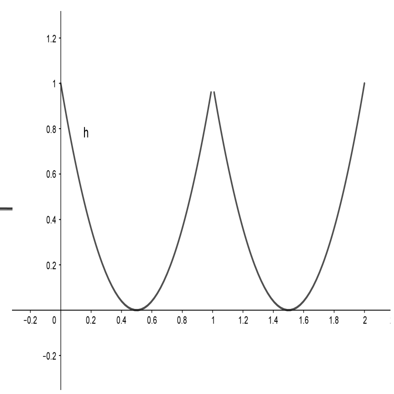
3. (**2 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

4. (**2 μον.**) Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f : (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad h : (0, 1) \cup (1, 2) \to \mathbb{R}.$$

Να γράψετε ποιές από αυτές είναι συνεχείς. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.





Απειροστικός Λογισμός Ι – 1ο Τεστ
5 Οκτωβρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η σύνθεση $g \circ f$ είναι $1-1$ τότε η f είναι $1-1$.

(β) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to 0} f(x)$ και $\lim_{x\to 0} g(x)$ τότε $\lim_{x\to 0} f(x) < \lim_{x\to 0} g(x)$.

(γ) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ τότε υπάρχει $s > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $f(x) \geqslant s$.

(δ) Έστω $f, g : (0,1) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in (0,1)$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (0,1)$.

2. (**2 μον.**) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x^2 f(x) \geqslant x + 3$ για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. **(2 μον.)** Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που παίρνει μόνο τις τιμές 0 ή 1. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

4. **(2 μον.)** Σχεδιάστε πρόχειρα μια πιθανή γραφική παράσταση συνεχούς συνάρτησης $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να έχει **όλες** τις παρακάτω ιδιότητες:

- είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
- έχει σύνολο τιμών το $(0, 2]$,
- έχει ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$,
- έχει σημεία καμπής τα $(-1, 1)$ και $(1, 1)$.