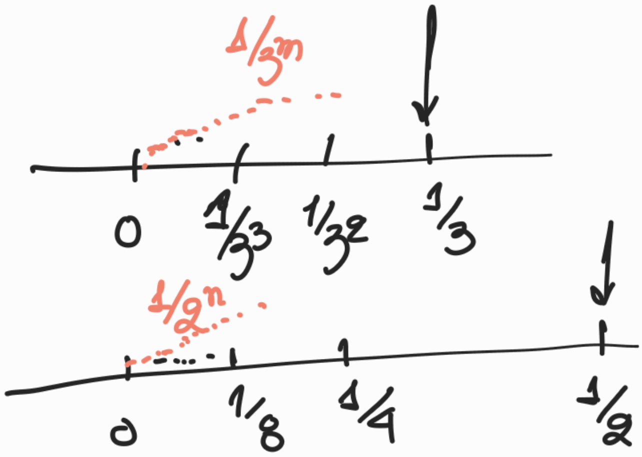
① Βρείτε τα sup, inf του

$$A := \left\{ \frac{1}{3^m} + \frac{1}{2^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

<u>Λύση</u>:



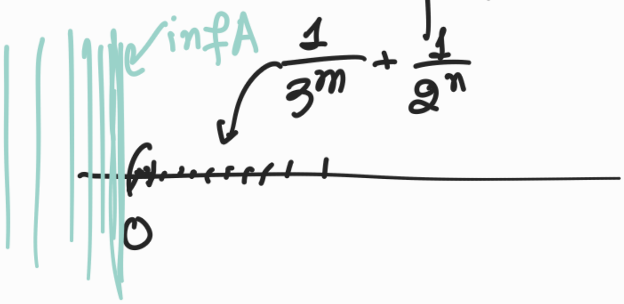
• $\left.\begin{array}{l} \forall m \in \mathbb{N}, \ \dfrac{1}{3^m} \leq \dfrac{1}{3^1} \\ \text{και } \forall n \in \mathbb{N}, \ \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{2^1} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{3^m} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \in A, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$(m=1, n=1)$.

$$\Rightarrow \frac{5}{6} = \max A = \sup A.$$

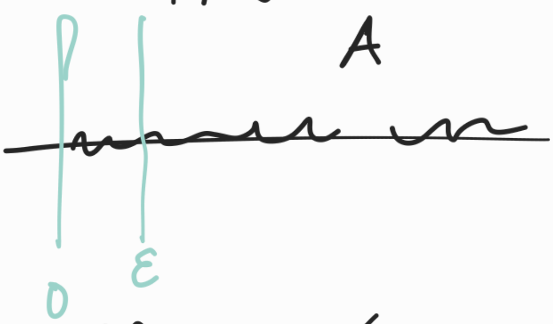
•



$\inf A = 0$:

① Το 0 <u>είναι</u> κάτω φράγμα του A:

$0 \leq a, \ \forall a \in A,$

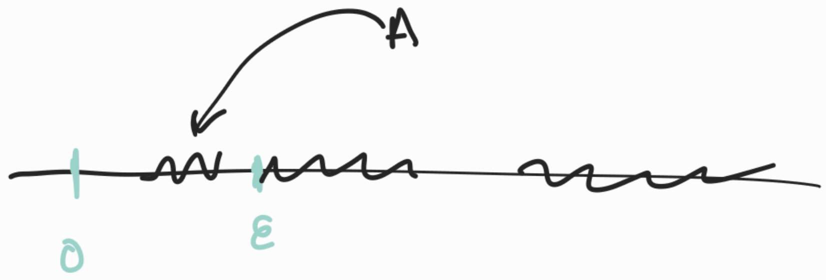


δηλ.

$$0 \leq \frac{1}{3^m} + \frac{1}{2^n}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}. \quad ✓$$

② Το 0 είναι το <u>μεγαλύτερο</u> από τα κάτω φράγματα του A. Απδ: έστω $\varepsilon > 0$.

ΘΔΟ το ε <u>δεν</u> είναι κάτω φράγμα του A:



Αρκεί ΝΔΟ $\exists\, a\in A$ με $a<\varepsilon$,

δηλ. ότι $\boxed{\exists\ m,n\in\mathbb{N},\ \text{με}\ \frac{1}{3^m}+\frac{1}{2^n}<\varepsilon}$

Για κάθε $m=n$, έχουμε:

$$\frac{1}{3^m}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}\le 2\cdot\frac{1}{2^n}\overset{?}{<}\varepsilon$$

$$2\cdot\frac{1}{2^n}<\varepsilon \iff \frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

<u>1ος τρόπος</u>: $\iff 2^n>\frac{2}{\varepsilon}\iff n\cdot\ln 2>\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$

$$\iff n>\frac{\ln(2/\varepsilon)}{\ln 2}$$

Τέτοιο n υπάρχει, επειδή το $\mathbb{N}$ <u>δεν</u> είναι άνω φραγμένο (Αρχιμήδεια ιδιότητα). ✓

<u>2ος τρόπος</u>: $\iff 2^n>\frac{2}{\varepsilon}$.

$$2^n\ge n:\quad 2^n=(1+\underbrace{1}_{=a})^n\underset{\text{Bernoulli}}{\ge}1+n\cdot\underbrace{1}_{=a}>n$$

$\left(\dot{n} : \quad 2^n = (1+1)^n = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \geq n \right)$.

Και $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $\quad n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ (Αρχ. Ιδιότητα)

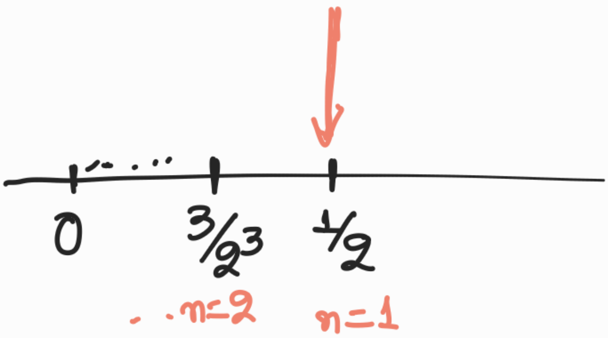
$\longrightarrow \boxed{2^{n_0} >} \, n_0 > \boxed{\frac{2}{\varepsilon}}$.

Άρα, το $0 = \inf A$.

∎

(2) Βρείτε τα sup, inf του

$$A := \left\{ \frac{n}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$



• $\max A \,(= \sup A) = \frac{1}{2}$:

$\frac{1}{2} \in A \quad (n=1)$ ✓

και $\frac{1}{2}$ άνω φράγμα του A: (1ος τρ.: $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{2} \ \forall n$.

2ος τρ.: $\frac{n}{2^n} \downarrow$ καθώς $n \nearrow$.

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \leq \frac{n}{2^n} \iff (n+1) \cdot 2^n \leq n \cdot 2^{n+1}$$

$$\iff n+1 \leq 2n \iff n \geq 1, \text{ που ισχύει}.$$

Άρα, $\frac{n+1}{2^{n+1}} \le \frac{n}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\rightarrow \frac{n}{2^n} \overset{n\geq 1}{\leq} \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

• $\inf A = 0$:

(1) Το 0 είναι κάτω φράγμα του A:

$$0 \le \frac{n}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \checkmark.$$

(2) Το 0 είναι το <u>μεγαλύτερο</u> κάτω φράγμα του A:

ε: <u>όχι</u> κάτω φρ.

Έστω ε>0. ΘΔΟ ∃ $\alpha \in A$ με $\alpha < \varepsilon$,

δηλ: ΘΔΟ ∃ $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\frac{n}{2^n} < \varepsilon}$

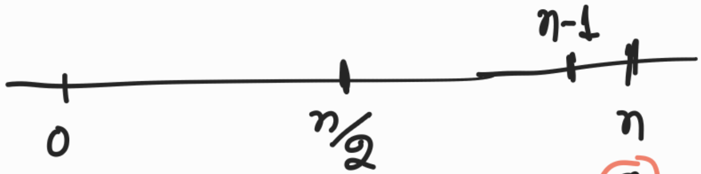
$$\Big(X \quad 2^n = (1+\underset{\alpha}{1})^n \ge 1 + n \cdot \underset{\alpha}{1} \Rightarrow 2^n \ge n+1$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2^n} \le \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} \Big)$$

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$\rightarrow 2^n \ge \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \underset{n-1 \ge \frac{n}{2}}{\overset{\text{για μεγάλα } n,}{\geq}} \frac{n \cdot \frac{n}{2}}{2}$$

$$\left(n-1 \geq \frac{n}{2} \iff 2n-2 \geq n \iff \boxed{n \geq 2} \right)$$



$\Rightarrow$ για $\boxed{n \geq 2,}$ $\quad 2^n \geq \dfrac{n^2}{4}$

$$\Rightarrow \frac{n}{2^n} \leq \boxed{\frac{4}{n}}, \quad \text{και} \quad \frac{4}{n} < \varepsilon \quad \boxed{\forall n > \frac{4}{\varepsilon}.}$$

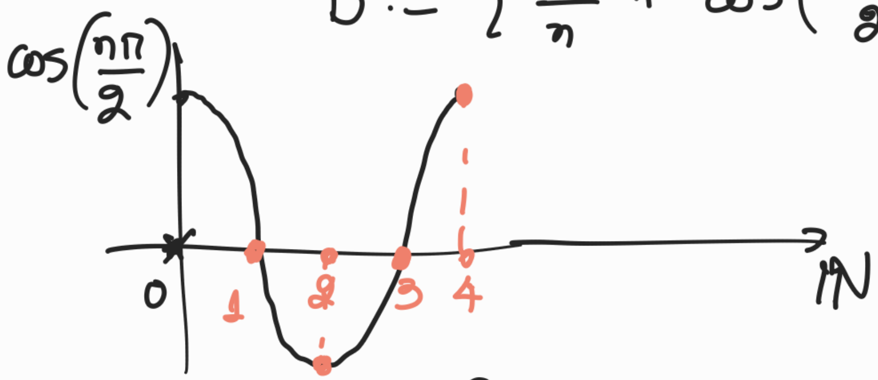
Άρα, $\quad \forall n \geq \max\{2, 4/\varepsilon\}$,

έχουμε: $\quad \dfrac{n}{2^n} < \varepsilon$. ∎

⚠ Δείξτε ότι $\inf\left\{\dfrac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0 \quad \left(2^n \geq \binom{n}{3} \sim n^3\right)$

③ Βρείτε τα sup, inf του

$$B := \left\{ \frac{1}{n} + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$



$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \forall\, n = 4k+1 \quad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \\ -1, & \forall\, n = 4k+2 \quad (\text{---}\,//\,\text{---}) \\ 0, & \forall\, n = 4k+3 \quad (\text{---}\,//\,\text{---}) \\ 1, & \forall\, n = 4k+4 \quad (\text{---}\,//\,\text{---}) \end{cases}$$

Άρα, $B = \Big\{ \overset{0< \quad \le 1}{\frac{1}{4\kappa+1}} : \kappa \in \mathbb{N}\cup\{0\} \Big\} = B_1$

$\cup \Big\{ \overset{<0}{\frac{1}{4\kappa+2} - 1} : \kappa \in \mathbb{N}\cup\{0\} \Big\} = B_2$

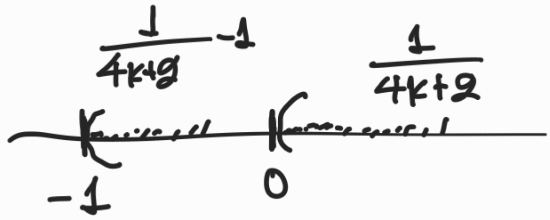
$\cup \Big\{ \overset{0< \quad \le 1}{\frac{1}{4\kappa+3}} : \kappa \in \mathbb{N}\cup\{0\} \Big\} = B_3$

$\cup \Big\{ \overset{>1}{\frac{1}{4\kappa+4} + 1} : \kappa \in \mathbb{N}\cup\{0\} \Big\} = B_4$.

Άρα, $\inf B = \inf B_2$, $\sup B = \sup B_4$.

• $\inf B_2 = -1$:

$B_2 = \Big\{ \frac{1}{4\kappa+2} - 1 : \kappa \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \Big\}$



(1) Το -1 είναι κάτω φράγμα του B_2:

$\forall \kappa \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\overset{\ge 0}{\frac{1}{4\kappa+2}} - 1 \ge -1$ ✓

(2) Το -1 είναι το <u>μεγαλύτερο</u> κάτω φρ. του B_2:

Έστω $\varepsilon > 0$.

Ψάχνουμε $\kappa \in \mathbb{N}\cup\{0\}$:

$$\underbrace{\frac{1}{4k+2}\cancel{+1}}_{\in B_2} < \cancel{1}+\varepsilon \Longleftrightarrow 4k+2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Longleftrightarrow 4k > \frac{1}{\varepsilon} - 2$$

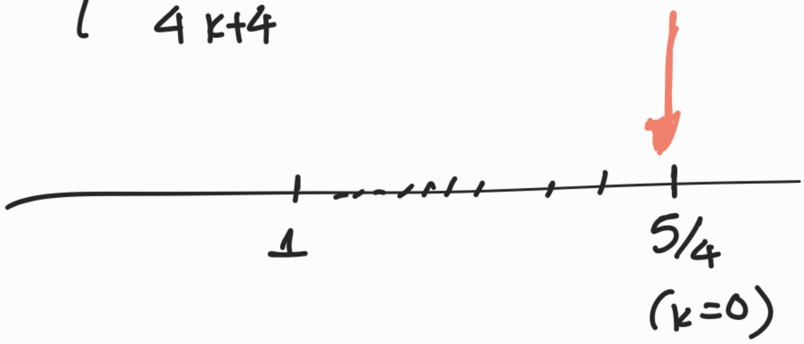
$$\Longleftrightarrow k > \boxed{\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}}$$

Τέτοιο k υπάρχει (Αρχιμήδεια ιδιότητα).

Άρα, $\inf B = 1$.

- $\sup B_4 = 5/4 = \max B_4$:

$$B_4 = \left\{ \frac{1}{4k+4} + 1 \ : \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$



① $\frac{5}{4} \in B_4 \quad (k=0)$

② $\forall k \geq 0 : \quad \frac{1}{4k+4} \leq \frac{1}{4\cdot 0+4} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4k+4} + 1 \leq \frac{5}{4}.$$

Άρα, $\sup B = \max B = \frac{5}{4}$.

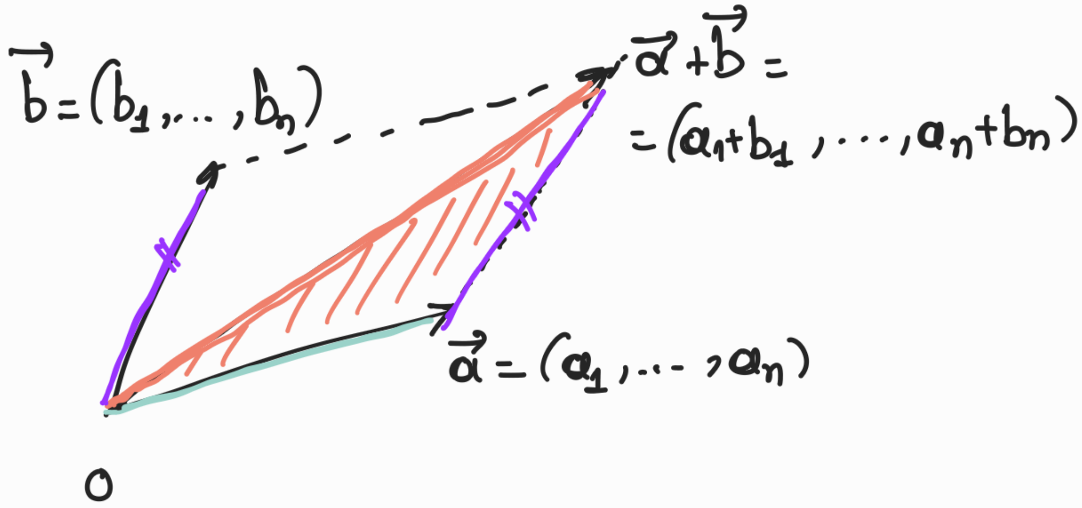
∎

④ Να δειχθεί η <u>ανισότητα Minkowski</u>:

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\left(\boxed{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2}.$$

<u>Σχήμα</u>:



μήκος $(\vec{a} + \vec{b}) \leq$ μήκος $(\vec{a})$ + μήκος $(\vec{b})$

(Σε κάθε τρίγωνο, κάθε πλευρά είναι $\leq$ από το άθροισμα των άλλων δύο.).

<u>Λύση</u>: $Q = \boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \underbrace{(a_k + b_k)^2}_{(a_k+b_k)\cdot(a_k+b_k)}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot (a_k + b_k)$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\overbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^2}}^{= Q} \right)^{1/2} \cdot \underbrace{\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2} \right]}_{= B}$$

Άρα: $Q \leq Q^{1/2} \cdot B$

$$\Rightarrow Q^{1-\frac{1}{2}} \leq B \Rightarrow \boxed{Q^{1/2} \leq B}$$, δηλ.

$$\Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^2}_{= Q} \Big]^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{1/2}.$$

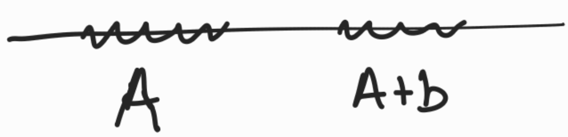
∎

(5) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$, άνω φραγμένα.

$$A+B := \{ a+b : a \in A, \ b \in B \}$$

$\forall \ b \in B$,

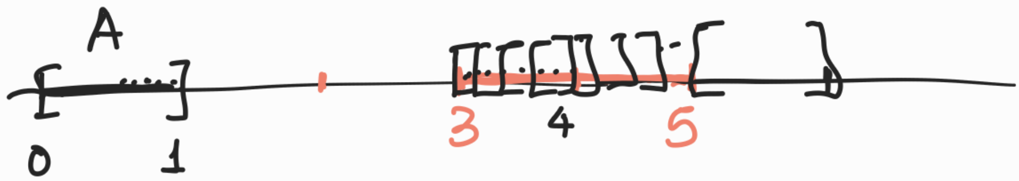
$A+b := \{ a+b : a \in A \}$: η μεταφορά του A κατά b.



$A+B = \bigcup_{b \in B} A+b$ = η ένωση <u>όλων</u> των μεταφορών του A κατά όλα τα $b \in B$.

Πχ: $A = [0,1]$

$B = [3,5]$.



$A + 3 = [3,4]$

$A + 4 = [0,1] + 4 = [4,5]$

$A + 4.1 = [4.1, 5.1] \ldots$

$A + 5 = [5,6]$.

Άρα, $A+B = [0,1] + [3,5] = [3,6]$

ΝΔΟ: $\underset{(\inf)}{\sup}(A+B) = \underset{(\inf)}{\sup} A + \underset{(\inf)}{\sup} B$.

Λύση: • $\sup \underbrace{(A+B)}_{= C} \le \overbrace{\sup A + \sup B}^{= d}$

το d είναι άνω φρ. του C

$\sup C \le d \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$

$\forall c \in C,\ c \le d$

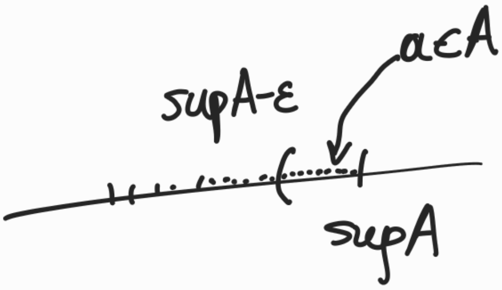
Άρα, αρκεί ΝΔΟ $\forall a \in A$, $b \in B$,

$a + b \le \sup A + \sup B$. Αυτό ισχύει: $\forall a \in A$, $a \le \sup A$,

$\forall b\in B,\ b\le \sup B.$

- $\sup A + \sup B \le \sup(A+B)$:

$\left(\begin{array}{ccc} \text{"}\|\text{"} & & \text{"}\|\text{"} \\ a & + & b\end{array}\right)$



Έστω $\varepsilon>0$.

$\exists\ a\in A$: $\sup A-\varepsilon < a\ (\le \sup A)$ $\quad$ (a "=" $\sup A$)

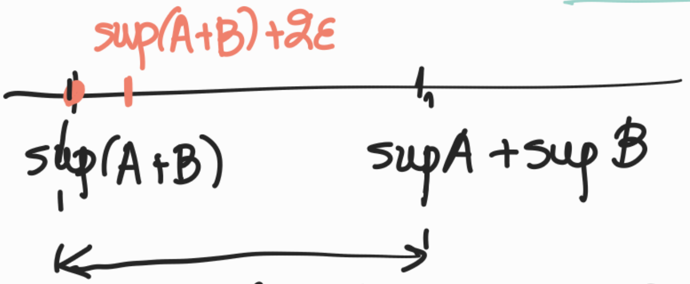
$\exists\ b\in B$: $\sup B-\varepsilon < b\ (\le \sup B)$ $\quad$ (b "=" $\sup B$)

$$\overset{(+)}{\Longrightarrow}\ \boxed{\sup A+\sup B-2\varepsilon} < \underbrace{a+b}_{\in A+B} \boxed{\le \sup(A+B)}$$

$$\Longrightarrow\ \sup A+\sup B \le \sup(A+B)+2\varepsilon,\quad \forall\varepsilon>0$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow}\ \sup A+\sup B \le \sup(A+B).$$

(Έστω ότι $\sup A+\sup B \not\leq \sup(A+B)$. Βρίσκουμε $\varepsilon>0$ τόσο μικρό ώστε $\boxed{\sup(A+B)+2\varepsilon \not\leq \sup A+\sup B.}$



(πχ $\varepsilon=\frac{1}{3}\cdot \ell$)

$\ell=(\sup A+\sup B)-\sup(A+B)$)

άτοπο!