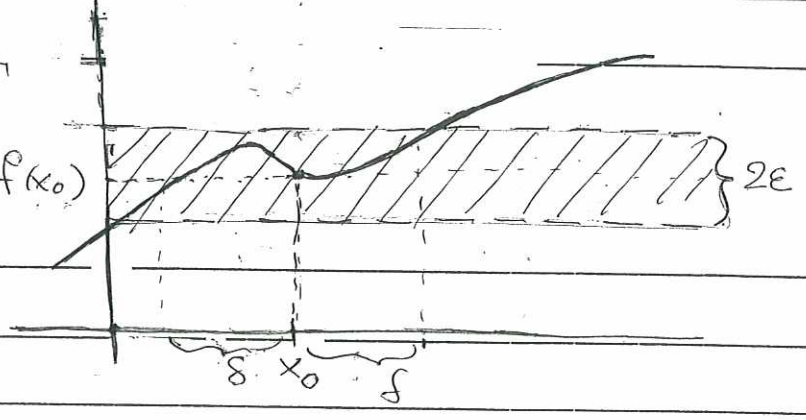
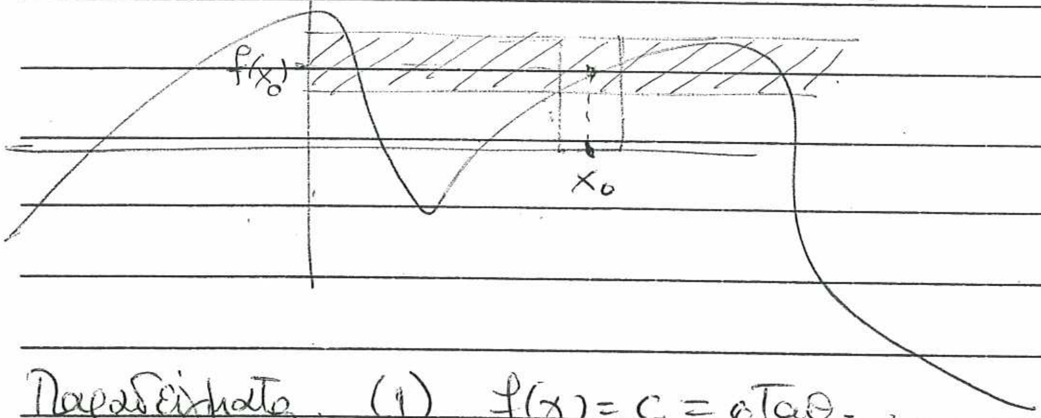
ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΟΡΣ $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Λέμε ότι f συνεχής στο $x_0 \iff$

$\iff \left(\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : x\in A \ \& \ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right)$.

f συνεχής $\iff$ f συνεχής στο x, $\forall x\in A$.





Παραδείγματα (1) $f(x)=c=$ σταθ.

$x_0\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. Τότε: $\forall \delta>0 : |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|=$

$=|c-c|=0<\varepsilon$.

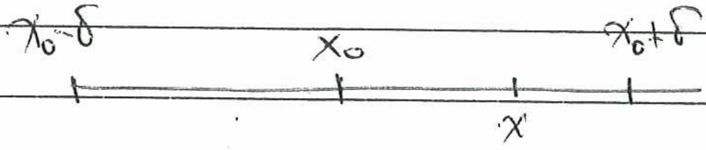
(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f(x)=x$, $x_0\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \iff |x-x_0|<\varepsilon$

Αρκεί $\delta=\varepsilon$.

(3) $f(x)=x^2$, $x_0\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$

$|f(x)-f(x_0)| = |x^2-x_0^2| = |x-x_0|\cdot|x+x_0| \underset{;}{<} \varepsilon$ (*)



$|x|-|x_0| \le |x-x_0| < \delta \Rightarrow |x| < \delta + |x_0|. \Rightarrow$

$|x+x_0| \le |x|+|x_0| \le 2|x_0|+\delta$

(*) $|f(x)-f(x_0)| = |x-x_0|\cdot|x+x_0| < \delta(2|x_0|+\underset{\uparrow 1.}{\delta}) \le \varepsilon$

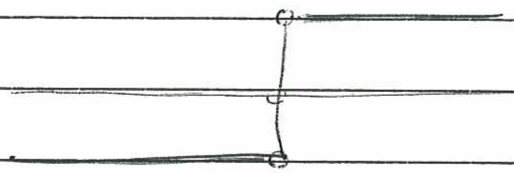
$\Updownarrow$

$\delta < \varepsilon / (2|x_0|+1).$

Θέτω $\delta := \min\{1, \varepsilon/(2|x_0|+1)\}$.

$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| = |x-x_0|\cdot|x+x_0| < \delta\cdot(2|x_0|+\delta) \le$
$\le \delta\cdot(2|x_0|+1) \le \dfrac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\cdot(2|x_0|+1) = \varepsilon.$

(4) $f: \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}:\ f(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0. \end{cases}$
Είναι συνεχής.



Άρνηση του Ορσ. f όχι συνεχής στο $x_0 \Longleftrightarrow$
$\exists\, \varepsilon>0\ \forall\, \delta>0\ \exists\, x\in A$ με $|x-x_0|<\delta$ και $|f(x)-f(x_0)| > \varepsilon$.

Παραδ. Η συνάρτηση του Dirichlet:
$f(x) = \begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$ είναι ασυνεχής, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Παίρνω $\varepsilon = 1/2$. Τότε $\forall\,\delta>0$

— $f(x_0)=1 \Rightarrow$ στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $\exists$ άρρητος x
$\Downarrow$
$x\notin\mathbb{Q} \Rightarrow |x-x_0|<\delta$ και $|f(x)-f(x_0)| = 1 > 1/2 = \varepsilon$.

— $f(x_0)=0 \Rightarrow$ ανάλογα.

Αρχή της μεταφοράς

ΘΕΩΡ $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A$ $\iff$

$\forall (x_n)$ του A με $x_n \to x_0$, $(f(x_n)) \to f(x_0)$.

Απόδ. ($\Rightarrow$) Έστω f συνεχής στο x_0, και έστω (x_n) του A με $x_n \to x_0$. Θδο $f(x_n) \to f(x_0)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. f συνεχής στο $x_0 \Rightarrow \left(\exists\, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow \right.$

$\left. \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right)$.

Για το $\delta > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $|x_n - x_0| < \delta$

$\Downarrow$

$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Με άτοπο: Έστω ότι $\forall (x_n)$ του A με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$, αλλά f όχι συνεχής στο $x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 :$ $\forall \delta > 0$ $\exists\, x \in A : |x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$.

$\Downarrow$

για $\delta = 1/n$ $\exists\, x_n \in A :$ $|x_0 - x_n| < 1/n$ και $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$x_n \to x_0$ $\qquad\qquad$ $f(x_n) \not\to f(x_0)$. $\blacksquare$

ΧΡΗΣΗ: (+) f συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$; Αρκεί νδο

$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.

(−) f ασυνεχής στο x_0? Αρκεί νδο

$\exists\, x_n \to x_0 : f(x_n) \not\to f(x_0)$

Συνέχεια & πράξεις

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ}}$ $f, g: A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $x_0 \in A$. Τότε:

(1) $f+g$, fg συνεχείς στο x_0.

(2) $g(x) \neq 0 \ \forall x \in A \Rightarrow f/g$ συνεχής στο x_0.

Απόδ: Με Αρχή Μεταφοράς

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ}}$ $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$, f συνεχής στο $x_0 \in A$ και g συνεχής στο $f(x_0) \in B$. Τότε $g \circ f$ συνεχής στο x_0.

Απόδ $x_n \to x_0 \Rightarrow \underset{B}{\overset{\cap}{f(x_n)}} \to \underset{B}{\overset{\cap}{f(x_0)}} \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$

Ερωτήσεις (1) $f(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R}_*$ συνεχής;

(2) $f(x) = 1$, $x \in [0,1]$ $\quad A = [0,1] \cup \{2\}$
$f(2) = 2$ $\quad f$ συνεχής;

(3) $A = \mathbb{N} \Rightarrow$ κάθε (a_n): $a: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής?

(4) $B = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$
$f: B \to \mathbb{R}$: $f(1/n) = 1/n^2$ συνεχής?

(5) $C = B \cup \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in B \\ c, & x = 0 \end{cases}$$ συνεχής;

Πρόταση $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$.
$f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$, $f(A) \subseteq B$, f συνεχής στο $x_0 \in A$, g συνεχής στο $f(x_0)$ $\Rightarrow$ $g \circ f$ συνεχής στο x_0.

Απόδ. Έστω (x_n) στο A με $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$
$\to g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$. ∎

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΓΝΩΣΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

(1) c, $f(x) = x$ συνεχείς $\Rightarrow$ πολυωνυμικές & ρητές στο π.ο. τους

(2) ΠΡΟΤΑΣΗ $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ συνεχείς.
(άρα και $\tan$, $\cot$ συνεχείς)

Απόδ. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right| \leq$$
$$\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|.$$

Άρα, $\forall \varepsilon > 0$ παίρνοντας $\delta := \varepsilon > 0$ έχουμε
$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| \leq |x-x_0| < \delta = \varepsilon$.

Επίσης

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin \frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right| \leq$$
$$\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$$

& ε, δ όπως προηγουμένως. ∎

(3) ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $a > 0$. Η $f_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty) : x \mapsto f_a(x) = a^x$ είναι συνεχής.

Απόδ. Έστω $a>1$.

(1) Δείχνουμε ότι η f_a είναι συνεχής στο 0: Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή $\sqrt[n]{a}$ και $1/\sqrt[n]{a} \to 1$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:

$$1-\varepsilon < \frac{1}{\sqrt[n_0]{a}} = a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} = \sqrt[n_0]{a} < 1+\varepsilon.$$

Παίρνουμε $\delta := 1/n_0 > 0$. Επειδή $f_a \uparrow$, $\forall x \in \mathbb{R}$ με $|x|<\delta$ ($\Leftrightarrow -\delta < x < \delta$) έχουμε:

$$1-\varepsilon < a^{-1/n_0} < a^x < a^{1/n_0} < 1+\varepsilon.$$

Άρα

$$|f_a(x) - f_a(0)| = |a^x - 1| < \varepsilon.$$

(2) Δείχνουμε ότι f_a συνεχής σε τυχαίο x_0: Έστω $x_n \to x_0$

$\Rightarrow x_n - x_0 \to 0 \Rightarrow f_a(x_n - x_0) \to a^0 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{x_n - x_0} \to 1 \Rightarrow a^{x_n}/a^{x_0} \to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{x_n} \to a^{x_0}$.

(3) Για $a=1 \Rightarrow f_1(x) = 1^x = 1$ σταθ. $\Rightarrow$ συνεχής, και για $a<1 \Rightarrow 1/a > 1$ και $f_{1/a}$ συνεχής $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$ συνεχής $\Rightarrow a^x$ συνεχής. ∎

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΟΡΣ. $f: A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$. Περιορισμός της f στο B είναι η $f_B : B \to \mathbb{R}$: $\quad f_B(x) = f(x), \quad \forall x \in B$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $\rho > 0$: για $B = A \cap (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ η f_B συνεχής στο $x_0 \implies f$ συν. στο x_0.

Απόδ

Εστω $\varepsilon > 0$. f_B συν. στο $x_0 \implies \exists\ \delta_1 > 0 : \forall x \in B$ με $|x - x_0| < \delta_1$:

$$|\underbrace{f_B(x)}_{= f(x)} - \underbrace{f_B(x_0)}_{= f(x_0)}| < \varepsilon$$

Θέτω $\delta := \min\{\delta_1, \rho\}$. Τότε

$$\forall x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta \implies \begin{cases} |x - x_0| < \rho \Rightarrow x \in B \text{ με} \\ |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Ασκ. Ισχύει το αντίστροφο;

ΠΡΟΤΑΣΗ $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A \implies$ τοπικά φραγμένη στο x_0 (δηλ: $\exists\ \delta > 0$: $f|_B$ φραγμένος με $B = A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$).

Απόδ. Εστω $\varepsilon > 0 \implies \exists\ \delta > 0 : \forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \implies$$

$$\implies \underbrace{\forall x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta}_{\Updownarrow\ x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = B} : \quad |f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \le$$

$$\le |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \le$$

$$\le \varepsilon + |f(x_0)| =: M. \quad \blacksquare$$

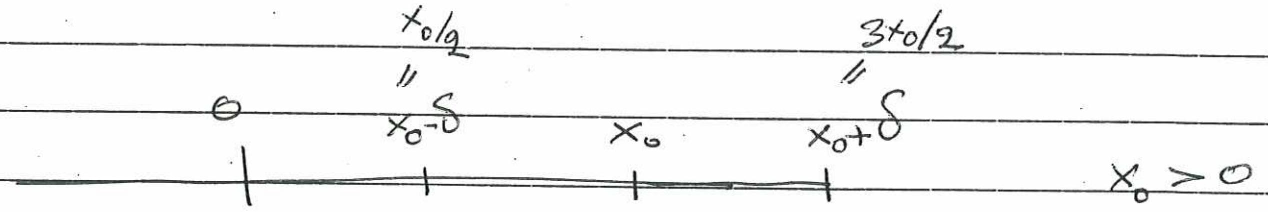
Π.χ. $f(x)=1/x$ όχι φραγμένη.

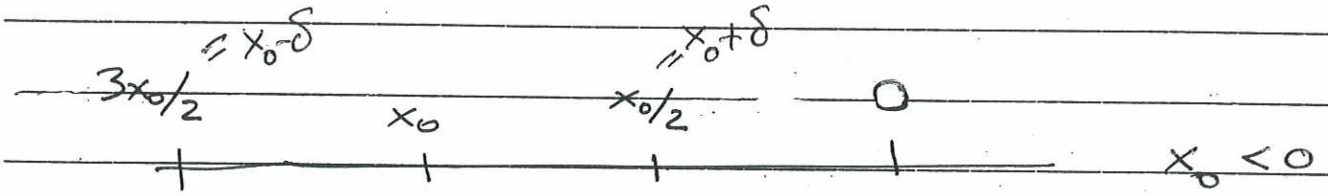
όμως $\forall\, x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}=A$

$\exists\, \delta>0$: $f(x)$ περιορ. στο $(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ φραγμ.:

Πράγματι: $\delta := \frac{x_0}{2} \Rightarrow$

$\forall\, x\in\mathbb{R}$: $x\in(x_0-\delta,\, x_0+\delta) \Rightarrow x_0-\frac{|x_0|}{2} < x < x_0+\frac{|x_0|}{2}$





Έστω $x_0>0 \Rightarrow x_0/2 < x < 3x_0/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2}{3x_0} < \underbrace{1/x = f(x)}_{=|1/x|} < \underbrace{2/x_0}_{=2/|x_0|} = M = \text{άνω φρ.}$$

Έστω $x_0<0 \Rightarrow 3x_0/2 < x < x_0/2 < 0 \Rightarrow$

$$-3x_0/2 > -x > -x_0/2 > 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{2}{3x_0} < \underbrace{-\frac{1}{x}}_{=\left|\frac{1}{x}\right|} < \underbrace{-\frac{2}{x_0}}_{=\frac{2}{|x_0|}} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{2}{|x_0|} = M = \text{άνω φράγμα}$$

Παρατηρήσεις:

(1) Κάθε περιορισμός συνεχούς είναι συνεχής:

$f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A$ και $B \subseteq A$ με $x_0 \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow f|_B : B \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0.

Απόδ.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0, $\exists\, \delta > 0$:

$x \in A$ και $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Τότε:

$x \in B$ και $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in A$ και $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |\underset{f|_B(x)}{\underset{\parallel}{f(x)}} - \underset{f|_B(x)}{\underset{\parallel}{f(x_0)}}| < \varepsilon \Rightarrow |f|_B(x) - f|_B(x_0)| < \varepsilon$.

Άρα $f|_B$ συνεχής στο x_0.

(2) Αν $f|_B$ συνεχής στο $x_0 \in B \subseteq A$, για ειδικής μορφής
$B = A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0

(Έχει δειχθεί σε προηγούμενη Πρόταση)

(3) Το αντίστροφο του (1) δεν ισχύει.

Πχ. η $f: A = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

δεν είναι συνεχής. Όμως, για $B = \mathbb{Q}$ η
$f|_B : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : f|_B(x) = 1$ είναι σταθερή, άρα
συνεχής.

ΠΡΟΤΑΣΗ $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A$ και $f(x_0) \neq 0$.

(i) Αν $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : f(x) > 0 \ \forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$.

(ii) Αν $f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : f(x) < 0 \ \forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$.

Απόδ.

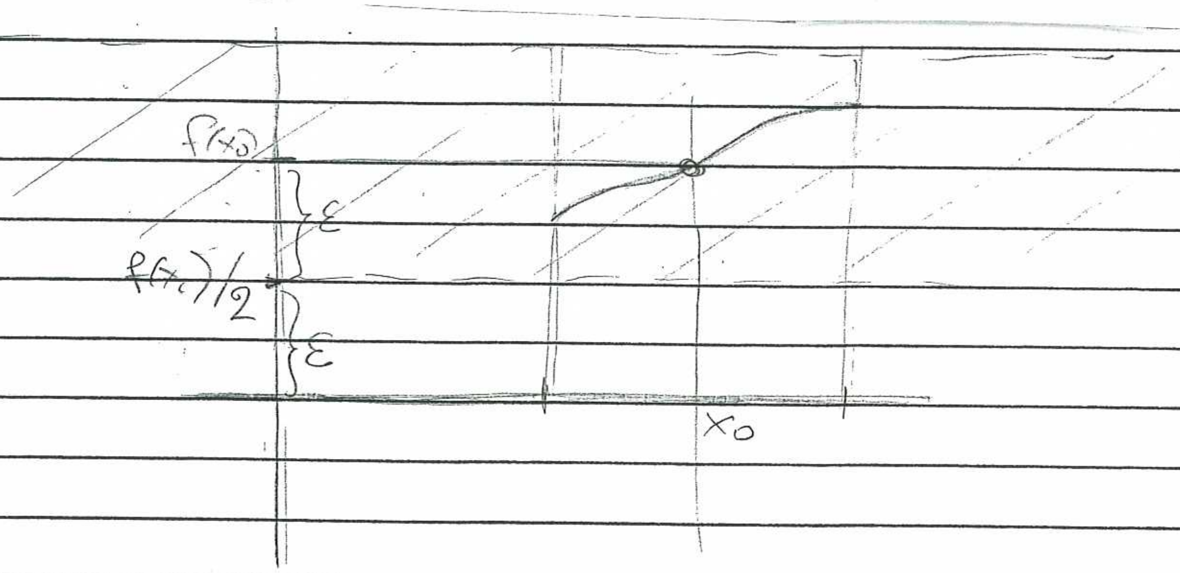
(i) Έστω $f(x_0) > 0$ και έστω $\varepsilon := f(x_0)/2$. Από συνέχεια $\exists\, \delta > 0 : \forall x \in A$ & $|x - x_0| < \delta$, ισχύει

$-\varepsilon/2 < f(x) - f(x_0) < \varepsilon/2 \iff$

$-f(x_0)/2 < f(x) - f(x_0) < f(x_0)/2 \iff$

$f(x_0)/2 < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0)$.

(ii) Ομοίως, για $f(x_0) < 0$ παίρνουμε $\varepsilon := -f(x_0)/2$. ■



Παρατ: Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$, εξασφαλίζουμε στο (i) την ύπαρξη ενός $\xi > 0 : f(x) > \xi \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Για την ανισότητα $f(x) > 0$ θα αρκούσε να πάρουμε $\varepsilon = f(x_0)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ f φραγμένη.

Απόδ. Θδο f άνω φραγμένη. Με παρόμοιο τρόπο δείχνεται και ότι είναι κάτω φραγμένη. Θέτουμε:

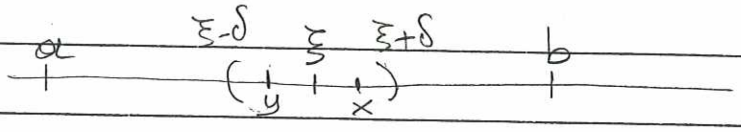
$A=\{y\in[a,b] : f$ άνω φραγμένη στο $[a,y]\}\subseteq[a,b]$.

Τότε: $a\in A \Rightarrow A\neq\emptyset$

$\forall y\in A: y\le b \Rightarrow A$ άνω φρ. από b $\Big\} \Rightarrow \exists\, \xi=\sup A\in\mathbb{R}$.

(1) $\xi\neq a$: $\exists\, \delta_1>0$: f φραγμ. στο $(a-\delta_1,a+\delta_1)\cap[a,b]=[a,a+\delta_1)\Rightarrow$
$\Rightarrow$ κάθε $y\in[a,a+\delta_1)$ είναι στοιχείο του $A\Rightarrow \xi\neq a$.

(2) Έστω $a<\xi<b$.



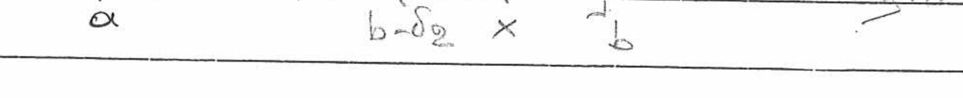
$\exists\,\delta>0$: f φραγμ. στο $(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap[a,b]=(\xi-\delta,\xi+\delta)$
$(\delta<\xi-a,\, b-\xi)$

$\exists\, y\in(\xi-\delta,\xi]$: $y\in A\Rightarrow f$ φρ. στο $[a,y]$
$\forall\, x\in(\xi,\xi+\delta)$: f φρ. στο $[y,x]$ $\Big\}\Rightarrow f$ φρ. στο $[a,x]$
$\Rightarrow \xi$ όχι $\sup A$.

Άρα $\xi=b$.

(3) Έχει δειχθεί: $\forall\, a\le x<b$: f φρ. στο $[a,x]$, δηλ.
$\forall x\in[a,b)$: $[a,x]\subseteq A\subseteq[a,b]$. Θδο $A=[a,b]$,
δηλ. ότι $\xi=\sup A=\max A=b\in A$.

f συνεχής στο $b\Rightarrow \exists\,\delta_2>0$: f φρ. στο $(b-\delta_2,b]$.



κτλ. ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (Μέγιστης – Ελάχιστης Τιμής).

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$:

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \quad \forall x \in [a,b].$$

Απόδ. Θέτουμε

$$B := f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Τότε

$$\left.\begin{array}{l} B \neq \emptyset \\ B \text{ φραγμ. (από Θ1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \rho = \sup B \in \mathbb{R}.$$

Θδο $\rho \in B$. Με άτοπο:

Αν $\rho \notin B \Rightarrow f(x) \neq \rho \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho > f(x), \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho - f(x) > 0, \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$:

$g(x) = \dfrac{1}{\rho - f(x)}$ συνεχής $\overset{\Theta 1}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow g$ φραγμένη $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, M > 0 : 0 < g(x) < M, \ \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{\rho - f(x)} < M \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{M} < \rho - f(x) \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) < \rho - 1/M < \rho \quad \forall x \in [a,b]$

δηλ. $\rho - 1/M$ είναι άνω φράγμα του B, άτοπο γιατί $\rho = \sup B$.

Ομοίως για το $\inf B$. ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 (Bolzano)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $f(a)<0$, $f(b)>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b) : f(\xi)=0.$

Απόδ. (1η)

$f(a)<0 \Rightarrow \exists\, \delta_1>0$: στο $[a, a+\delta_1)$: $f<0$.

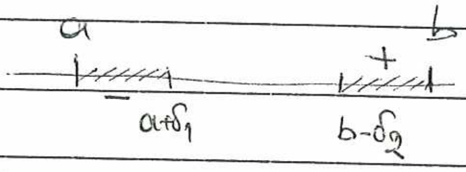
Άρα

$A := \{ y\in(a,b] : a\le x<y \Rightarrow f(x)<0 \} \neq \emptyset$

A άνω φρ. από b. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \sup A = \xi\in\mathbb{R}$: $\xi \ge a+\delta_1 \Rightarrow$
$\xi > a$,
$a<\xi<b$.

$f(b)>0 \Rightarrow \exists\, \delta_2>0$:
$f(x)>0 \quad \forall x\in(b-\delta_2, b]$.

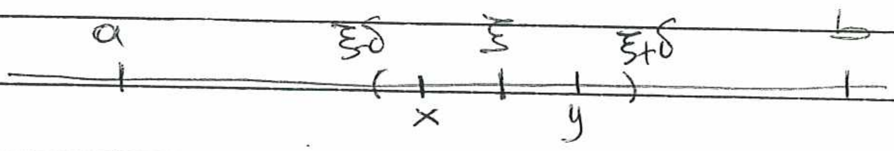


$\Downarrow$

$\xi \le b-\delta_2 < b$

Άρα $a<\xi<b$. $\boxed{\text{Θδο } f(\xi)=0.}$

Έστω $f(\xi)<0 \Rightarrow \exists\, \delta>0 \ \forall x\in(\xi-\delta, \xi+\delta) : f(x)<0$.
$(\delta < b-\xi,\ \xi-a)$



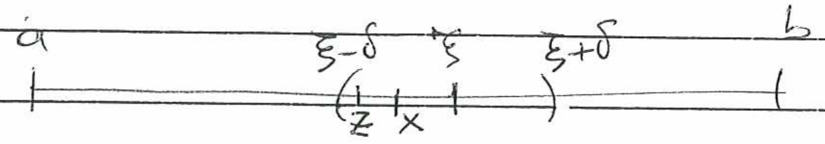
$\exists\, x\in(\xi-\delta, \xi]$: $x\in A$, δηλ. $f(z)<0 \quad \forall z\in[a,x]$
$\forall y\in(\xi-\delta, \xi+\delta) \quad f(y)<0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall z\in[a,y] : f(z)<0.$

$\Rightarrow y\in A \Rightarrow \xi\neq \sup A$, άτοπο.

Έστω $f(\xi) > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : f(z) > 0 \quad \forall\, z \in (\xi-\delta, \xi+\delta)$

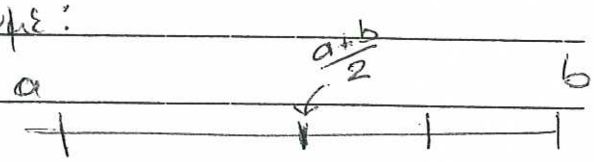
$(\delta < b-\xi, \xi - a)$



$\forall\, x \in (\xi-\delta, \xi] \Rightarrow \exists\, z < x : f(z) > 0 \Rightarrow x \notin A \Rightarrow$

$\Rightarrow A \subseteq [a, \xi-\delta] \Rightarrow \xi$ όχι $\sup A$, άτοπο.

β' Απόδ. $I = [a, b]$ διχοτομούμε:



$\frac{a+b}{2} \rightsquigarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ $\nearrow = 0$ ok.

$\rightarrow < 0 \Rightarrow [a_1, b_1] : a_1 = \frac{a+b}{2}, \ b_1 = b.$

$\searrow > 0 \Rightarrow [a_1, b_1] : a_1 = a, \ b_1 = \frac{a+b}{2}$

και επαναλαμβάνουμε ....

$\frac{a_1+b_1}{2}$ $\nearrow = 0$ οκ

$\rightarrow < 0$ πετάμε a_1 & παίρνουμε $[a_2, b_2]$ $\quad a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$

$\searrow > 0$ πετάμε b_1 — // — // — // — $\quad b_2 = \frac{b_1+a_1}{2}$, $a_2 = a_1$

$a \le a_1 \le a_2 \le \dots \le b_2 \le b_1 \le b$

και συνεχίζουμε επαγωγικά

$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$

$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{4}(b-a)$

$b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (b-a) \longrightarrow 0 \qquad \bigcap [a_n, b_n] = \{\xi\}$:

$a_n \rightarrow \xi \leftarrow b_n$

$\underset{<0}{f(a_n)} \longrightarrow \underset{\ge 0}{\overset{\le 0}{f(\xi)}} \longleftarrow \underset{>0}{f(b_n)} \Rightarrow f(\xi) = 0$

Θ.4 / ΠΟΡΙΣΜΑ: (Ενδιάμεσης Τιμής)

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $f(a) < \rho < f(b)$ ή αν $f(a) > \rho > f(b)$, τότε $\exists\, \xi \in (a,b) : f(\xi) = \rho$.

Απόδ. Παίρνω την $g = f - \rho$ & εφαρμόζω Bolzano. ■

ΟΡΣ $I \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται διάστημα $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y \in I$ ($x<y$) όλο το ευθύγραμμο τμήμα $[x,y] \subseteq I$.

π.χ. Άρα: ανοιχτά/κλειστά/ημιανοιχτά διαστήματα & ανοιχτές/κλειστές ημιευθείες.

ΘΕΩΡ.5 I διάστημα, $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow f(I)$ διάστημα.

Απόδ.

Έστω $y_1 < y_2 \in f(I) \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in I : f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$.

Υποθ. $x_1 < x_2 \Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq I$

f συνεχής στο $[x_1, x_2] \Rightarrow$

$\forall\ y : f(x_1) < y < f(x_2)\ \ \exists\, x \in [x_1, x_2] : f(x) = y$

$\Rightarrow \forall\, y \in [f(x_1), f(x_2)] : f(y) \in f(I) \Rightarrow$

$\Rightarrow [y_1, y_2] = [f(x_1), f(x_2)] \subseteq f(I)$.

$\Rightarrow f(I)$ διάστημα. ■

Πόρισμα $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \exists\, m, M \in \mathbb{R}$:

$$f([a,b]) = [m, M].$$

10.10

Άσκηση

Να εξετάσετε αν τα Θ 1-4 ισχύουν για συναρτήσεις συνεχείς, ορισμένες σε ανοιχτά διαστήματα

$$f : (a,b) \to \mathbb{R} \quad , \text{ ή}$$

$$f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Αν όχι, να δώσετε αντιπαραδείγματα.