ΜΑΘΗΜΑ
ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

ΟΡΣ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{παράγωγος της } f \text{ στο } x_0}\in\mathbb{R}$$

Παρατ. Στα άκρα κλειστού διαστήματος $[a,b]$ μπορεί να οριστεί (πλευρική) παράγωγος από το πλευρικό όριο.

ΠΑΡΑΔ.

(1) $f(x)=c$, $x_0\in\mathbb{R}$

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c'=0}$$

(2) $f(x)=x$, $x_0\in\mathbb{R}$

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x'=1}$$

(3) $f(x)=x^2$, $x_0\in\mathbb{R}$

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(x^2)'=2x}$$

(4) $f(x)=|x|$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Στο $(-\infty,0)$: $f(x)=-x\Rightarrow\dots\Rightarrow f'(x)=-1$.

Στο $(0,+\infty)$: $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$.

Για $x_0=0$:

$$-1=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-}=1\Rightarrow\nexists f'(0).$$

D2

Υπενθ: $\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}$

$\cos x - \cos x_0 = 2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x_0-x}{2}$.

(5) $f(x)=\sin x, \quad x_0\in\mathbb{R}$.

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 2\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2} = 1\cdot\cos\frac{2x_0}{2} = \cos x_0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

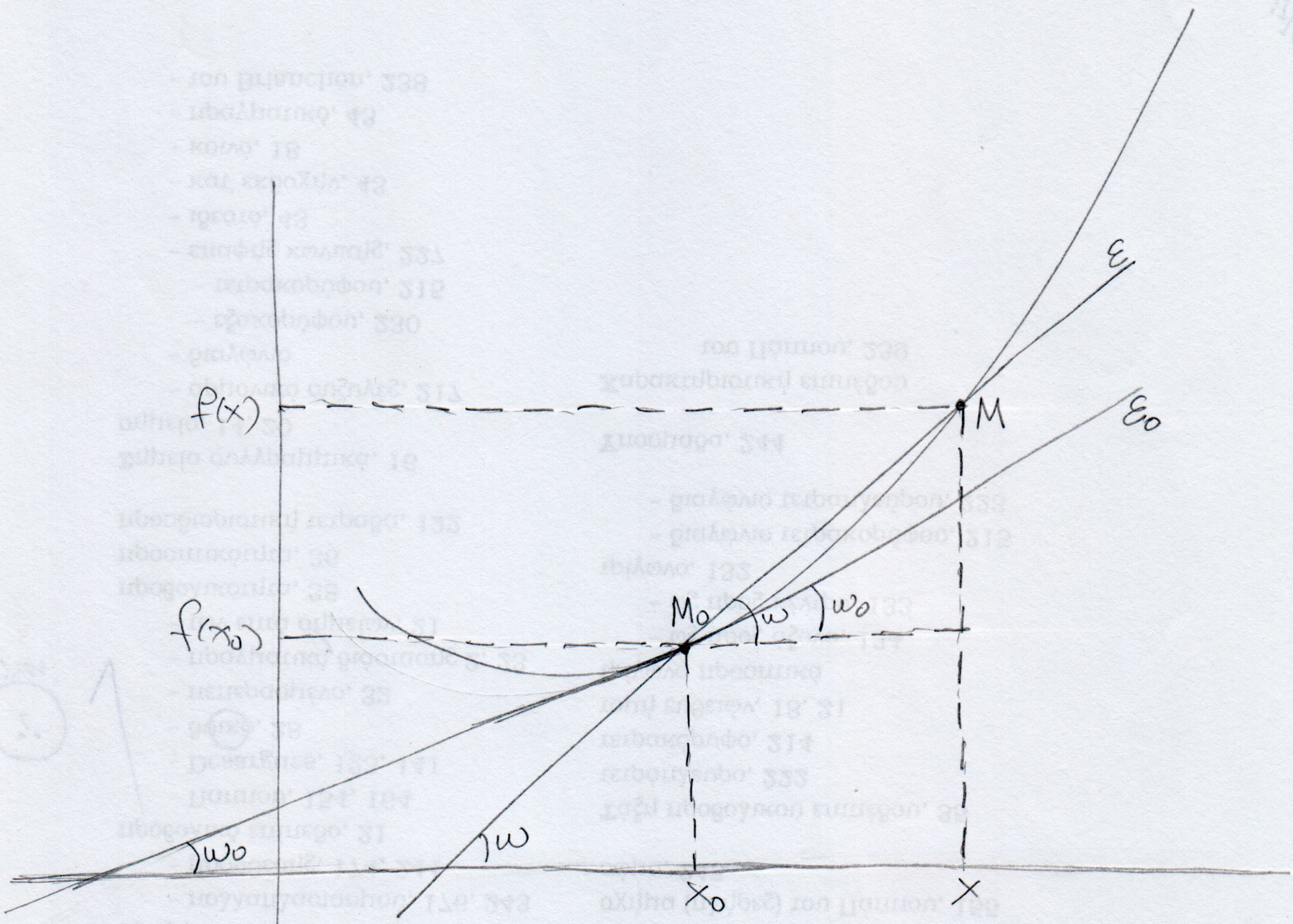
(6) $f(x)=\cos x, \quad x_0\in\mathbb{R}$.

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 2\frac{\sin\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x_0-x}{2}}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} -\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\sin\frac{x+x_0}{2} = -1\cdot\sin\frac{2x_0}{2} = -\sin x_0.$$

$$\Rightarrow \boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

ΓΕΩΜ. ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ $f'(x_0)$



$$x \to x_0 \Rightarrow M=(x, f(x)) \longrightarrow M_0=(x_0, f(x_0))$$

$$\Rightarrow \varepsilon \to \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \omega \to \omega_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\omega \longrightarrow \varepsilon\varphi\omega_0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow \varepsilon\varphi\omega_0 \equiv f'(x_0)$$

(7) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ Είναι παραγωγίσιμη στο 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = ?$$

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{x^2}{x}=x & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\underset{\downarrow\,0}{0} \le \left|f(x)/x\right| \le \underset{\downarrow\,0}{|x|} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Η $f(x)$ δεν είναι πουθενά συνεχής εκτός από το 0!

(8) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x^3 & x>0 \end{cases}$

$x_0<0 \Rightarrow f(x)\equiv x^2$ και $f'(x_0)=2x_0$

$x_0>0 \Rightarrow f(x)\equiv x^3$ και $f'(x_0)=3x_0^2$

$$\exists?\ \lim_{x\to}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = ?$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0. \\ &\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim \frac{x^3}{x} = \lim x^2 = 0. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

D4

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ΘΕΩΡ. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$.
Αν f παραγωγίσιμη στο x_0 $\Rightarrow$ f συνεχής στο x_0.

Απόδ.

$$\left.\begin{array}{l}\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in\mathbb{R}\\ \exists \lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{πολ/ζω}}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0\cdot f'(x_0)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)+f(x_0)=0+f(x_0)$$

$$=f(x_0)\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f συνεχής στο x_0. ∎

D5

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Θεωρ. $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$; f,g παραγ. στο x_0. Τότε:

(i) $f+g$ παραγ. στο x_0 και $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

(ii) $\forall \lambda\in\mathbb{R}$: λf παραγ. στο x_0 και $(\lambda f)'(x_0)=\lambda\cdot f'(x_0)$

(iii) fg —"— και $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+$
$+f(x_0)g'(x_0)$.

(iv) Αν $g(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$ $\Rightarrow$
f/g παραγ. στο x_0 και $(f/g)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Απόδ.

(iii)
$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$
$$=f(x)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)$$
$$\longrightarrow f(x_0)\cdot g'(x_0)+f'(x_0)\cdot g(x_0).$$

(iv) Αρκεί νδο $1/g$ παραγωγίσιμη:

$$\frac{(1/g)(x)-(1/g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{1/g(x)-1/g(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(x_0)-g(x)}{(x-x_0)\cdot g(x)g(x_0)}$$
$$\longrightarrow -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.\ \blacksquare$$

Παρατ. Καραθεοδωρή: f παραγωγίσιμη στο x_0

$\Rightarrow$ η συνάρτηση $\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$ συνεχής στο x_0.

Αντίστροφα: αν $\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0 \\ \lambda \in \mathbb{R}, & x = x_0 \end{cases}$ συνεχής στο x_0

$\Rightarrow$ f παραγ. στο x_0 με $f'(x_0) = \lambda$. ∎

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ}}$ (κανόνας αλυσίδας)

$f : (a,b) \to (c,d)$ παραγ. στο $x_0 \in (a,b)$ και

$g : (c,d) \to \mathbb{R}$ —"— $f(x_0) = y_0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ παραγ. στο x_0 και

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Απόδ. Έστω ψ η συνάρτηση Καραθεοδωρή για την g:

$$\psi(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & y \neq y_0 \\ g'(y_0), & y = y_0 \end{cases}$$ Τότε:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} \overset{⊛}{=} \psi(f(x)) \cdot \phi(x) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

⊛ Πράγματι:

- αν $f(x) \neq f(x_0) \Rightarrow \dfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \dfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \psi(f(x)) \cdot \phi(x)$
- αν $f(x) = f(x_0) \Rightarrow 0 = 0$. ∎

ΘΕΩΡ (παράγωγος αντίστροφης)

$f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$ 1-1, συνεχής, παραγωγίσιμη στο $x_0\in(a,b)$ και $f'(x_0)\neq 0 \Longrightarrow f^{-1}$ παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και

$$(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Απόδ Γνωρίζουμε ότι f γν. μονότονη, έστω $f\uparrow$.
Επίσης

$$\exists \lim_{x\to x_0}\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\left(\substack{>0\\ \text{για } \uparrow}\right)}=\underbrace{f'(x_0)}_{\left(\substack{>0\\ \text{για } \uparrow}\right)}\neq 0. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$$

Παρατηρώ ότι

$$\left\|\begin{array}{ccc} x_n \xrightarrow{x_n\neq x_0} x_0 & \Longleftrightarrow & f(x_n)\longrightarrow f(x_0)\\ f^{-1}(y_n)\rightarrow f^{-1}(y_0) & \Longleftrightarrow & y_n \xrightarrow[y_n\neq y_0]{} y_0 \end{array}\right\|$$

$$\Longrightarrow \exists \underbrace{\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}}_{\text{L}:\,(f^{-1})'(y_0).}=\frac{1}{f'(x_0)}.\ \blacksquare$$

Παρατ: Αν $f'(x_0)=0 \Longrightarrow \nexists (f^{-1})'(y_0)$

Πράγματι, αν υπήρχε, θα ήταν

$$\underbrace{(id)'(x_0)=1}=(f^{-1}\circ f)'(x_0)=(f^{-1})'(f(x_0))\cdot f'(x_0)=\lambda\cdot 0=0,\ \text{άτοπο.}\ \blacksquare$$

ΟΡΣ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη $\forall x\in(a,b)\Rightarrow$
$f':(a,b)\to\mathbb{R}: x\mapsto f'(x)$ λέγεται
<u>παράγωγος συνάρτηση της f.</u>

Αν $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγ. $\forall\, x\in(a,b)\Rightarrow$
ορίζεται η <u>2η παράγωγος της f</u>:
$$f''=(f')'.$$
Επαγωγικά $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$.

$\exists\, f^{(n)}\Rightarrow f$ είναι <u>n-φορές παραγωγίσιμη.</u>
$\exists\, f^{(n)}(x_0)\ \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow f$ <u>απειρόριστα παραγωγίσιμη στο</u> x_0.

Π.χ. $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$.

Ισχύει: $a_k=\dfrac{p^{(k)}(0)}{k!}\qquad\forall\,k\le n.$

Σκοπός μας τώρα είναι νδο η εκθετική συνάρτηση $\exp(x)=e^x$ είναι παραγωγίσιμη.

<u>Λήμμα 1</u>
$\forall\, x\in(-1,0)\cup(0,1)$:
$$x+1\le e^x\le\frac{1}{1-x}$$

<u>Απόδ.</u>
→ Για $x=1/n$, $n\ge 2$:
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\Rightarrow$$
$$1+x=1+\frac{1}{n}<e^{1/n}<1+\frac{1}{n-1}=\frac{n}{n-1}=\frac{1}{1-1/n}=\frac{1}{1-x}.$$

→ Για $x = m/n$, $1 \leq m < n$:

Ισχύουν οι ανισότητες:

$a \geq -1 \Rightarrow (1+a)^n \geq 1+na$ (Bernoulli) (α)

$0 < a < 1/n \Rightarrow (1+a)^n < \frac{1}{1-na}$ (β)

Άρα

$1+x = 1+\frac{m}{n} \underset{\text{Bern}}{\leq} \left(1+\frac{1}{n}\right)^m < e^{m/n} = e^x$

Παρατηρούμε ότι $\underbrace{1/n}_{a} < 1/m \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: \underbrace{1/kn}_{a} < 1/km \overset{\beta'}{\underset{\text{ανισ.}}{\Rightarrow}}$

$\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{km} < \frac{1}{1-km/kn} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow$

Άρα:

$e^x = \left[\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}\right]^{m/n} =$

$= \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{km} \leq \frac{1}{1-x}$.

→ Για τυχαίο $x \in (0,1)$ $\exists$ ακ/ος ρητών $q_n \to x \Rightarrow$

$1+q_n \leq e^{q_n} < \frac{1}{1-q_n} \overset{\text{exp}}{\underset{\text{συνεχής}}{\Rightarrow}}$

$\Rightarrow 1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$

→ Για $x \in (-1,0)$: $-x \in (0,1) \Rightarrow$

$0 < 1-x < e^{-x} < \frac{1}{1+x} \Rightarrow$

$\frac{1}{1-x} > \frac{1}{e^{-x}} = e^x > 1+x$ ∎

Λήμμα 2

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Απόδ.

Από τις ανισότητες του Λ.1, για $x \in (-1,0)\cup(0,1)$, έχουμε:

$$1+x < e^x < \frac{1}{1-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < e^x - 1 < \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

→ Για $x>0$, διαιρώντας με x παίρνουμε

$$1 < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{1-x} \Rightarrow 1 \le \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} \le \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-x} = 1$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

→ Για $x<0$, διαιρώντας με x παίρνουμε:

$$1 > \frac{e^x-1}{x} > \frac{1}{1-x} \Rightarrow 1 \ge \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} \ge \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-x} = 1$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1. \quad \blacksquare$$

ΠΡΟΤΑΣΗ e^x παραγωγίσιμη και $(e^x)' = e^x$.

Απόδ.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} \cdot e^{x_0} = 1 \cdot e^{x_0} = e^{x_0}. \quad \blacksquare$$

D10a

Άσκηση $\quad a>0$

(i) Νδο a^x συνεχής

(ii) Νδο a^x παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε την $(a^x)'$.

Απάντ.

(i) $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$ = σύνθεση συνεχών $\Rightarrow$ συνεχής

(ii) $a^x = e^{x\ln a}$ = σύνθεση παραγωγίσιμων.

$$x \xrightarrow{\gamma} x\ln a \xrightarrow{\exp} e^{x\ln a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^x)' = (\exp\circ\gamma)'(x) = \exp(\gamma(x))\cdot\gamma'(x) =$$

$$= e^{\gamma(x)}\cdot \ln a = e^{x\ln a}\cdot \ln a =$$

$$= a^x \ln a.$$