Ασκήσεις από Σημειώσεις «Απειροστικός Λογισμός Ι», Α. Γιαννόπουλου

Κεφάλαιο 2, Ασκήσεις Ομάδας Α΄

8.

$$\delta_n = \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{(n+1)^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{2/3}} \leq (n+1)\frac{1}{n^{2/3}} = \sqrt[3]{n} + \frac{1}{n^{2/3}} \to +\infty$$

αλλά αυτό δεν μας είναι χρήσιμο. Όμως επίσης,

$$\delta_n = \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{(n+1)^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{2/3}} \geq (n+1)\frac{1}{(2n)^{2/3}} \geq n\frac{1}{(2n)^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{n}}{2^{2/3}} \to +\infty$$

και άρα $\delta_n \to +\infty$. Πράγματι, δοθέντος $M \in (0, +\infty)$, υπάρχει $n_M \in \mathbb{N}$ (π.χ. $n_M = 4M^3 + 1$) τ.ω.

$$\frac{\sqrt[3]{n}}{2^{2/3}} > M \quad \forall n \geq n_M,$$

και τότε .

$$\delta_n > M \quad \forall n \geq n_M,$$

αφού $\delta_n \geq \frac{\sqrt[3]{n}}{2^{2/3}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} \\ &\leq \frac{n + n^2 + n^3 + \cdots + n^n}{n^n} \\ &= \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^{n-2}} + \frac{1}{n^{n-3}} + \cdots + \frac{1}{n} + 1 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^i \end{aligned}$$

και από τον τύπο για το άθροισμα των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου (εδώ με λόγο το $1/n$)

$$b_n \leq \frac{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Όμως

$$\left(\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(αφού $1/n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$) και άρα $\left(\frac{1}{n}\right)^n \to 0$, από κριτήριο παρεμβολής. Άρα

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

Επίσης

$$b_n \geq \frac{n^n}{n^n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

και άρα, από κριτήριο παρεμβολής $b_n \to 1$.

9. (α) Έστω $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_k > 0$. Ειδική περίπτωση αυτής της άσκησης ήταν η άσκηση 7β, όπου είχαμε $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}$. Εκεί βγάλαμε κοινό παράγοντα το μεγαλύτερο από τα δύο, δηλαδή το $\frac{1}{2}$. Κάνουμε το ίδιο και εδώ. Έστω $i \in \{1, \dots, k\}$ τέτοιο ώστε

$$a_i = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

Τότε

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = a_i \sqrt[n]{\left(\frac{a_1}{a_i}\right)^n + \left(\frac{a_2}{a_i}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_k}{a_i}\right)^n} \leq a_i \sqrt[n]{1 + 1 + \cdots + 1}$$

$$= a_i \sqrt[n]{k},$$

επειδή

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_\iota} = \frac{\alpha_1}{\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}} \leq 1, \frac{\alpha_2}{\alpha_\iota} = \frac{\alpha_2}{\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}} \leq 1, \dots$$

$$\dots, \frac{\alpha_k}{\alpha_\iota} = \frac{\alpha_k}{\max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}} \leq 1.$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \geq \sqrt[n]{a_i^n} = a_i$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, συνολικά έχουμε ότι

$$a_i \leq b_n \leq a_i \sqrt[n]{k}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\sqrt[n]{k} \to 1$ και άρα $a_i \sqrt[n]{k} \to a_i$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $b_n \to a_i = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

(β) Δεν εφαρμόζεται άμεσα το (α) γιατί τώρα έχουμε n όρους μέσα στην ρίζα, ενώ στο (α) είχαμε έναν σταθερό αριθμό όρων k, ανεξάρτητο από το n. Εφαρμόζεται όμως η ίδια μέθοδος απόδειξης.

$$x_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 + 2^n + \cdots + n^n} = \frac{1}{n} n \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^n} \leq \sqrt[n]{n}$$

και επίσης $x_n \geq \frac{1}{n} \sqrt[n]{n^n} = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\sqrt[n]{n} \to 1$, από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $x_n \to 1$.

10. Το ακέραιο μέρος του αn είναι αn συν-πλην κάτι μικρότερο από ένα. Άρα το ακέραιο μέρος του αn διαιρεμένο με n είναι α συν-πλην κάτι μικρότερο από $1/n$, και άρα το συν-πλην που περισσεύει τείνει στο μηδέν. Άρα το όριο πρέπει να είναι α. Πράγματι, αυτό αυστηρά λέγεται ως εξής. Από τον ορισμό του ακεραίου μέρους, $[\alpha n] \leq \alpha n < [\alpha n] + 1$, οπότε

$$\alpha n - 1 < [\alpha n] \leq \alpha n$$

και άρα

$$\frac{\alpha n - 1}{n} < \frac{[\alpha n]}{n} \leq \frac{\alpha n}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \frac{1}{n} < \frac{[\alpha n]}{n} \leq \alpha$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι

$$\frac{[\alpha n]}{n} \to \alpha.$$

11. Έστω $\alpha > 0$ και

$$b_n = \frac{1 + n\alpha}{(1 + \alpha)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Προφανώς $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1+(n+1)\alpha}{(1+\alpha)^{n+1}}}{\frac{1+n\alpha}{(1+\alpha)^n}} = \frac{1+n\alpha+\alpha}{1+n\alpha}\frac{1}{1+\alpha} = \left(1+\frac{\alpha}{1+n\alpha}\right)\frac{1}{1+\alpha} < (1+\alpha)\frac{1}{1+\alpha} = 1,$$

με την ανισότητα να αιτιολογείται ως εξής: $1 + n\alpha > 1$ άρα

$$\frac{1}{1+n\alpha} < 1$$

και άρα

$$\frac{\alpha}{1+n\alpha} < \alpha,$$

οπότε

$$1 + \frac{\alpha}{1+n\alpha} < 1 + \alpha,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $b_{n+1} < b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και αυτό αποδεικνύει ότι η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι (γνησίως) φθίνουσα.

Επειδή είναι επίσης κάτω φραγμένη (από το μηδέν), έπεται ότι η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει. Παρατηρούμε τώρα ότι ο αριθμητής της b_n μεγαλώνει σαν μία δύναμη του n (n^1), ενώ ο παρονομαστής μεγαλώνει εκθετικά, σαν $(1+\alpha)^n$ και ο κανόνας είναι ότι οποιοδήποτε εκθετικό μεγαλώνει (πολύ) πιο γρήγορα από οποιαδήποτε δύναμη του n. Άρα περιμένουμε η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να τείνει στο μηδέν. Πράγματι, αυτό μπορούμε να το δείξουμε επικαλούμενοι το κριτήριο ρίζας εδώ.

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{\sqrt[n]{1+\alpha n}}{1+\alpha} \to \frac{1}{1+\alpha} =: \ell < 1$$

και έπεται από το κριτήριο ρίζας ότι $b_n \to 0$.

Μένει να δείξουμε ότι $\sqrt[n]{1+\alpha n} \to 1$, το οποίο χρησιμοποιήθηκε παραπάνω στον υπολογισμό για το κριτήριο ρίζας. Έχουμε αφενός μεν ότι $\sqrt[n]{1+\alpha n} \geq \sqrt[n]{1} = 1$, αφετέρου δε ότι

$$\sqrt[n]{1+\alpha n} \leq \sqrt[n]{n+\alpha n} = \sqrt[n]{n(1+\alpha)} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{1+\alpha} \to 1 \cdot 1 = 1,$$

άρα από το κριτήριο παρεμβολής, $\sqrt[n]{1+\alpha n} \to 1$.