

Απειροστικός Λογισμός Ι – Πρόδος

30 Νοεμβρίου 2019

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός Μητρώου:

1. (1+1+1 μον.)

(α) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} , και $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α.1) Το x είναι το supremum του A .

(α.2) Το x είναι άνω φράγμα του A , και για κάθε $\mu < x$ υπάρχει $a \in A$ με $\mu < a \leq x$.

(β) Δείξτε ότι αν A είναι μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} , τότε υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A η οποία συγκλίνει στο supremum του A .

(γ) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $0 < a < \frac{1}{n}$. Δείξτε ότι $(1+a)^n \leq \frac{1}{1-na}$.

2. (2 μον.)

Να βρεθούν τα sup, inf, max και min (αν αυτά υπάρχουν) των συνόλων

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{4^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} \leq x \leq 5\}.$$

3. (3+1 μον.)

(α) Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες

$$\alpha_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \quad \beta_n = \cos(n) \left(\sqrt[n]{n} - \frac{1}{3} \right)^n, \quad \gamma_n = \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n,$$

$$\delta_n = \sqrt[n]{\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{7^n}} \quad \text{και} \quad \varepsilon_n = \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{2}}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\sqrt{n+1}}{(2n)^2}.$$

(β) Υπολογίστε το όριο, αν υπάρχει, της ακολουθίας (a_n) που ορίζεται αναδρομικά με $a_1 = 3$ και $a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{5}$ για $n \in \mathbb{N}$.

4. (2 μον.)

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n \rightarrow 0$. Δείξτε ότι

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \rightarrow 0.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!