Απειροστικός Λογισμός Ι – 10ο Τεστ
10 Ιανουαρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις ln και exp ικανοποιούν τα εξής: (α) για κάθε $s > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^s} = +\infty$$

και (β)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^s} = 0.$$

2. (**2 μον.**) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b), ώστε $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι: για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση

$$f'(x) + \lambda f(x) = 0$$

έχει μια ρίζα στο διάστημα (a, b).

3. (3 μον.) Έστω $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (ξ_n) σημείων του (a,b) τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = f'(a).$$

4. (2 μον.) Εξετάστε αν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x| \sin x$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 10ο Τεστ

11 Ιανουαρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) (α) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1.$$

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\ln x \leqslant n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) \leqslant \sqrt[n]{x} \, \ln x.$$

(γ) Συμπεράνατε ότι $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) = \ln x$ για $x > 0$.

2. (**2 μον.**) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) > f(\xi)$. [*Υπόδειξη.* Θεωρήστε την $g(x) = e^{-x} f(x)$.]

3. (**3 μον.**) Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $g(a) = g(b) = 0$. Υποθέτουμε ότι η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b) και $g''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι $g(t) \neq 0$ για κάθε $t \in (a,b)$.

4. (**2 μον.**) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (x-1)^2 g(x)$. Εξετάστε ανυπάρχει η $f'(1)$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 10ο Τεστ
12 Ιανουαρίου 2017

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** (α) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1.$$

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x.$$

(γ) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2. **(2 μον.)** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. [*Υπόδειξη.* Θεωρήστε την $g(x) = e^{-x} f(x)$.]

3. (**3 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ και $f''(0) = 1$. Αποδείξτε ότι:

(α) υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: αν $0 < |x| < \delta_1$ τότε $\frac{f'(x)}{x} > 0$.

(β) υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε: αν $0 < |x| < \delta_2$ τότε $f(x) > 0$.

4. (**2 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(0) = f'(0) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{3^n} f\left(\frac{3^n}{n!}\right) = 0.$$