Απειροστικός Λογισμός Ι – 9ο Τεστ
20 Δεκεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε η f είναι συνεχής στο (a,b).

(β) Αν $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0,\infty)$ και $f(0)=0$, τότε $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0,\infty)$.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.

2. (**2 μον.**) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}.$$

3. **(3 μον.)** Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι δεν μπορεί να υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\lim_{x \to b^-} f'(x) = \alpha$.

4. **(2 μον.)** Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b), με $f(a) = f(b)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in (a, b)$ ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 9ο Τεστ
21 Δεκεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και αν $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n) = 0$.

(β) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 2$.

2. (**2 μον.**) Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$.

3. (3 μον.) Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$

4. (2 μον.) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι: $f(x_0) = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 9ο Τεστ
22 Δεκεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.

(β) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.

2. (**2 μον.**) Έστω $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0.$$

3. (**3 μον.**) Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}$$

είναι ίση με $\frac{2+a}{1+a}$.

4. (**2 μον.**) Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $[0,a]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,a)$. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και $f'(x) > 0$ στο $(0,a)$. Αν η f' είναι αύξουσα στο $(0,a)$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0,a)$.