Απειροστικός Λογισμός Ι – 8ο Τεστ
29 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Υπάρχει φραγμένη και συνεχής συνάρτηση $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ η οποία δεν παίρνει μέγιστη τιμή.

(β) Έστω $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\geqslant 0$. Τότε, η g διατηρεί πρόσημο: είτε $g(x)>0$ για κάθε $x\geqslant 0$ ή $g(x)<0$ για κάθε $x\geqslant 0$.

(γ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(0)=-f(1)$ τότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

2. (**2 μον.**) Έστω $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x)\in\mathbb{Z}$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

3. (**3 μον.**) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι συνεχείς στο x_0 και τέτοιες ώστε $f(x_0) \neq g(x_0)$. Αποδείξτε ότι: υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε:

«για κάθε $y, z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $f(y) \neq g(z)$.»

4. (**2 μον.**) Έστω $f, g : [a, b] \to (0, \infty)$ συνεχείς συναρτήσεις με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $f(x) < g(x)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\gamma > 1$ τέτοιος ώστε: για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $\gamma f(x) \leqslant g(x)$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 8ο Τεστ
30 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**3 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μη σταθερό πολυώνυμο το οποίο δεν μηδενίζεται πουθενά, τότε το p είναι άρτιου βαθμού.

(β) Αν η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, και αν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,1]$.

(γ) Υπάρχει αύξουσα συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ασυνεχής σε άπειρα το πλήθος σημεία.

2. (**2 μον.**) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \text{ αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{ αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι συνεχής μόνο στα σημεία $-1, 1$.

3. **(3 μον.)** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1: δηλαδή, $f(x+1) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(α) η f παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή,

(β) υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\xi) = f(\xi + \sqrt{3})$.

4. **(2 μον.)** Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n \in [0,1]$ ώστε $f(x_n) \to 0$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Απειροστικός Λογισμός Ι – 8ο Τεστ
1 Δεκεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (3 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν οι $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο 0 και $f(0) < g(0)$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$.

(β) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση, τότε η $g(x) = xf(x)$ είναι συνεχής στο 0.

(γ) Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f(x)| = 1$, τότε η f είναι σταθερή.

2. (2 μον.) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \text{ αν } x \in \mathbb{Q} \\ 2x & , \text{ αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι συνεχής μόνο στο σημείο 1.

3. (**3 μον.**) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\max(f) = \max(g)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

4. (**2 μον.**) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση $f : [0, 1] \to (0, 1)$.