Απειροστικός Λογισμός Ι – 1ο Τεστ
4 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω p, q ρητοί αριθμοί με $p < q$. Τότε, υπάρχει ρητός r τέτοιος ώστε $p < r < q$.

(β) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f(x)| = 1$. Τότε, η f είναι σταθερή.

(γ) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{10}{10}$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

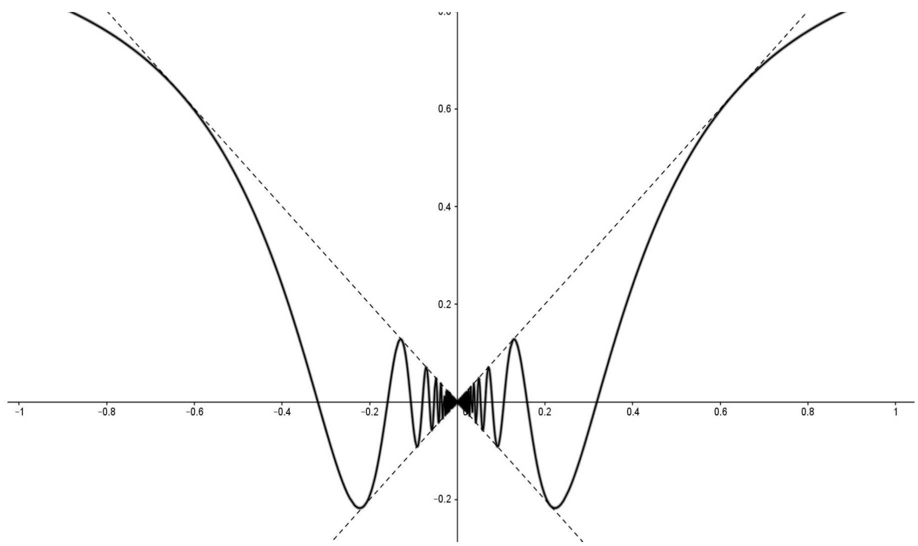
(δ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. (**2 μον.**) Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής αποδείξτε την – αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

«Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει η παράγωγος $(f+g)'(0)$ τότε υπάρχουν οι παράγωγοι $f'(0)$ και $g'(0)$.»

3. (2 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: αν $f(0) = 0$ και $f'(\xi) \geqslant 0$ για κάθε $\xi \geqslant 0$, τότε $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \geqslant 0$.

4. (2 μον.) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \to 0} f(x)$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Απειροστικός Λογισμός Ι – 1ο Τεστ
5 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω x, y θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Τότε, $x < y$ αν και μόνο αν $x^2 < y^2$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε η f δεν είναι συνεχής στο 0.

(γ) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που παίρνει μόνο τις τιμές 0 ή 1. Τότε, η f είναι σταθερή.

(δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geqslant 1 + x$.

2. (**2 μον.**) Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής αποδείξτε την – αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

«Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Αν ο x είναι ρητός και ο y είναι άρρητος τότε ο $x + y$ είναι άρρητος.»

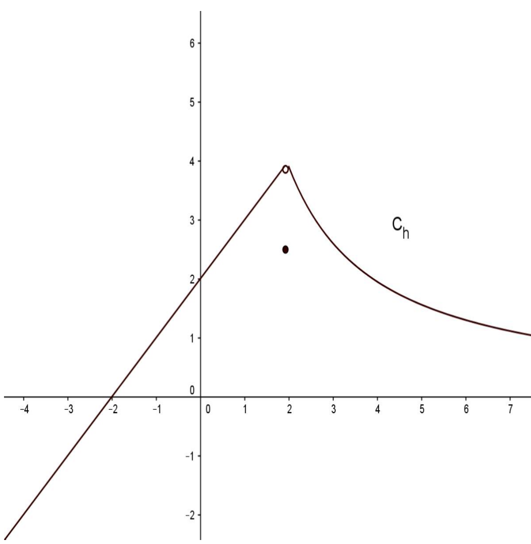
3. (**2 μον.**) Αποδείξτε ότι

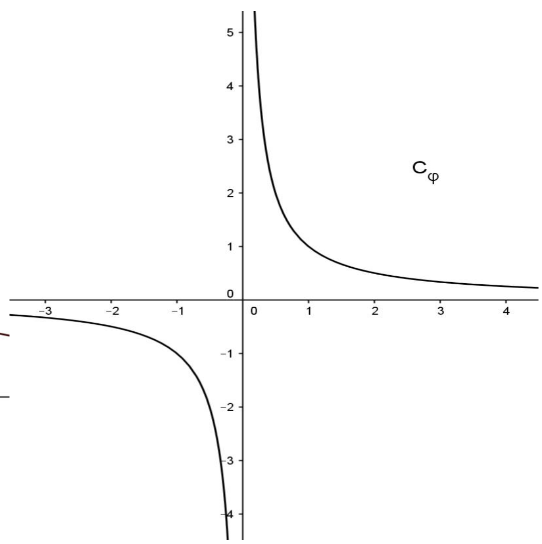
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^5} = +\infty$$

και

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}} = 0.$$

4. (**2 μον.**) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\varphi : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Να γράψετε ποιές από αυτές είναι συνεχείς. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.





Απειροστικός Λογισμός Ι – 1ο Τεστ
6 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Αν οι x και y είναι άρρητοι τότε ο $x + y$ είναι άρρητος.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η $|f|$ είναι συνεχής τότε η f είναι συνεχής.

(γ) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x)\text{ημ}\frac{1}{x} = 0$.

(δ) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν οι f και g παρουσιάζουν τοπικό ελάχιστο στο 0 τότε η $f + g$ παρουσιάζει κι αυτή τοπικό ελάχιστο στο 0.

2. (**2 μον.**) Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής αποδείξτε την – αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

«Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αν $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.»

3. (**2 μον.**) Εξετάστε αν είναι συνεχής η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\text{ημ}\, x & , \text{ αν } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$$

4. (**2 μον.**) Σχεδιάστε πρόχειρα μια πιθανή γραφική παράσταση συνεχούς συνάρτησης $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να έχει **όλες** τις παρακάτω ιδιότητες:

- είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$,
- έχει πεδίο τιμών το διάστημα $(0, 2]$,
- έχει ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$,
- έχει σημεία καμπής τα $(-1, 1)$ και $(1, 1)$.