ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Αλγεβρική δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζουμε με R, έχει δύο πράξεις, την πρόσθεση (+) και τον πολλαπλασιασμό (.), και μια σχέση διάταξης (<).

Ιδιότητες της πρόσθεσης

- **(Π1) Ύπαρξη του μηδενός**

  Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε με 0 (μηδέν)

  $$\boldsymbol{\alpha+0=\alpha}$$

  για κάθε πραγματικό αριθμό α.

- **(Π2) Ύπαρξη του αντιθέτου**

  Για κάθε πραγματικό αριθμό α, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε –α και λέγεται αντίθετος του α, ώστε

  $$\boldsymbol{\alpha+(-\alpha)=0}$$

- **(Π3) Προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης**

  $$\boldsymbol{\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma}$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ.

- **(Π4) Αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης**

  $$\boldsymbol{\alpha+\beta=\beta+\alpha}$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
Μοναδικότητα του μηδενός.

Αν μ πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει α+ μ = α για κάθε πραγματικό αριθμό α, τότε μ=0.

Απόδειξη.

Από την ιδιότητα του μ έχουμε 0+μ=0.

Από την (Π1) έχουμε μ+0 = μ.

Από την (Π4) και τα παραπάνω έχουμε

$$0 = 0 + \mu = \mu + 0 = \mu$$

Μοναδικότητα του αντιθέτου.

Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί και

α + β = 0 τότε β=-α.

Απόδειξη.

$\beta = \beta + 0$	(Π1)
$= \beta + (\alpha + (-\alpha))$	(Π2)
$= (\beta + \alpha) + (-\alpha)$	(Π3)
$= (\alpha + \beta) + (-\alpha)$	(Π4)
$= 0 + (-\alpha)$	(υπόθεση για τον β)
$= (-\alpha) + 0$	(Π4)
$= -\alpha$	(Π1)

- Συμβολισμός

  Αν α, β πραγματικοί αριθμοί θέτουμε

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Αξιώματα πολλαπλασιασμού

- **(Π5) Ύπαρξη της μονάδας**

  Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, που τον συμβολίζουμε με 1 (μονάδα), ώστε

  $$\mathbf{1 \neq 0 \text{ και } \alpha.1=\alpha}$$

  για κάθε πραγματικό αριθμό α.

- **(Π6) Ύπαρξη αντιστρόφου**

  Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε α^{-1} (αντίστροφος του α), ώστε

  $$\mathbf{\alpha.\alpha^{-1}=1}$$

- **(Π7) Προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιαμού**

  $$\mathbf{\alpha.(\beta.\gamma)=(\alpha.\beta).\gamma}$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ.

- **(Π8) Αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιαμού**

  $$\mathbf{\alpha.\beta=\beta.\alpha}$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β.

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και β≠0 θέτουμε

$$\alpha/\beta = \alpha.\beta^{-1}$$

- **Π9. Επιμεριστική ιδιότητα**

$\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha.\gamma$

για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ.

Αξιώματα της διάταξης

- **(Π10) Ιδιότητα μεταβατικότητας**

  Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί και

  α > β και β > γ τότε α > γ

- **(Π11) Ιδιότητα της τριχοτομίας**

  Για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ακριβώς μια από τις παρακάτω σχέσεις

  α = β, α < β, β < α

Αξιώματα που συνδέουν τις πράξεις με την διάταξη

- **(Π12) Διάταξη και πρόσθεση**

  Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και

  α > β τότε α + γ > β + γ

  για κάθε πραγματικό αριθμό γ.

- **(Π13) Διάταξη και πολλαπλασιασμός**

  Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με

  α > β και γ>0 τότε α.γ > β.γ