μάθ. 1 → eclass

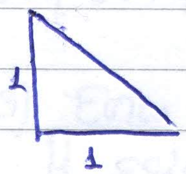
Μάθημα 2ο, 1/10/2012

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών IR

IN: 1, 2, 3 ...

Μέθοδος εξάντλησης: δεν είναι φραγμένο το σύνολο, δηλ. δε έχει τέλος

Q^+: $\frac{m}{n}$ $m, n \in$ IN: κλασματικοί: πηλίκο δύο φυσικών



$\sqrt{2} \notin Q$ Θεόδωρος Κυρηναίος απέδειξε $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ μέχρι $\sqrt{17}$ είναι άρρητος

Πρώτος: αυτός που διαιρείται με τον εαυτό του και το 1

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών (IR)

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών (π.α) συμβολίζεται με το IR

Έχει 2 πράξεις, την πρόσθεση (+) και τον πολλαπλασιασμό (·)

Έχει κ μια σχέση (ολικής) διάταξης "≤"

Εάν έχουμε α, β πραγματικούς αριθμούς αντιστοιχούμε το α+β στο άθροισμα αυτών και το γινόμενο αυτών α·β προκύπτει

π.χ. Επίσης $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \beta > \alpha \end{cases}$ α μικρότερο του β

ή

Το β μεγαλύτερο του α

Ιδιότητες πρόσθεσης

(Π1) Ύπαρξη του μηδενός

Υπάρχει πραγματικός αριθμός που συμβολίζεται με το 0, ώστε να ισχύει $\alpha+0=\alpha$ για κάθε α πραγματικό αριθμό

(Π2) Ύπαρξη αντιθέτων

Για κάθε πραγματικό αριθμό α, υπάρχει πραγματικός αριθμός που συμβολίζεται με το −α, ώστε να ισχύει $\alpha+(-\alpha)=0$

(Π3) Προσεταιριστική Ιδιότητα

Για κάθε α, β πραγματικούς αριθμούς ισχύει:

$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

(Π4) ~~Αν~~ Μεταθετική Ιδιότητα

Για κάθε α, β πραγματικούς αριθμούς ισχύει $\boxed{\alpha+\beta=\beta+\alpha}$

Ασκήσεις / Προτάσεις

1) Μοναδικότητα του μηδενός

Εάν μ είναι πραγματικός αριθμός ώστε $\alpha+\mu=\alpha$ για κάθε α πρ. αριθμό Τότε να αποδειχθεί ότι το μ είναι το μηδέν

Έχουμε

Απο την υπόθεση για τον πραγματικό αριθμό 0 $\quad 0+\mu \overset{\text{Υπόθεση}}{=} 0$

$\mu+0\overset{\Pi_1}{=}0$

$0=0+\mu\overset{\Pi_4}{=}\mu+0\overset{\Pi_1}{=}\mu.$ Άρα $\boxed{\mu=0}$ Πάντα με τους πιο λίγους τρόπους

2) Μοναδικότητα του Αντιθέτου

Έστω πραγματικός αριθμός α. Εάν β είναι πρ. αριθμός τέτοιος ώστε $\alpha+\beta=0$ τότε $\beta=-\alpha$

$$\beta \overset{\Pi_1}{=} \beta+0 \overset{\Pi_2}{=} \beta+(\alpha+(-\alpha)) \overset{\Pi_3}{=} (\beta+\alpha)+(-\alpha) \overset{\Pi_4}{=} (\alpha+\beta)+(-\alpha)$$
$$\overset{\text{υποθ}}{=} 0+(-\alpha) \overset{\Pi_4}{=} (-\alpha)+0 \overset{\Pi_1}{=} -\alpha$$

Συμβολισμός $\beta+(-\alpha) \overset{\text{συμβ}}{=} \beta-\alpha$

3) Έστω $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Η εξίσωση $\alpha+x=\beta$ έχει μοναδική λύση τον πραγματικό αριθμό $x=\beta-\alpha$

Λύση: Ισχυρισμός 1

Ο πραγματικός αριθμός $x=\beta-\alpha$ είναι λύση της εξίσωσης $\alpha+x=\beta$ διότι

$$\alpha+x=\alpha+(\beta+(-\alpha)) \overset{\Pi_4}{=} \alpha+((-\alpha)+\beta) \overset{\Pi_3}{=} (\alpha+(-\alpha))+\beta$$
$$\overset{\Pi_2}{=} 0+\beta \overset{\Pi_4}{=} \beta+0 \overset{\Pi_1}{=} \beta$$

Ισχυρισμός 2 Η λύση είναι μοναδική

Αν γ πραγματικός αριθμός ώστε $\alpha+\gamma=\beta$ - $\gamma=\beta-\alpha$

$$\gamma \overset{\Pi_1}{=} \gamma+0 \overset{\Pi_2}{=} \gamma+(\alpha+(-\alpha)) \overset{\Pi_3}{=} (\gamma+\alpha)+(-\alpha) \overset{\Pi_4}{=} (\alpha+\gamma)+(-\alpha)$$
$$\overset{\text{υποθ}}{=} \beta+(-\alpha) \overset{\text{συμβ}}{=} \beta-\alpha$$

4) Απλοποίηση για την πρόσθεση

Έστω $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ Τότε ν.δ.ο $\alpha=\beta$

$$a \overset{\Pi_1}{=} a+0 = a+(\gamma+(-\gamma)) \overset{\Pi_3}{=} (a+\gamma)+(-\gamma) \overset{\text{υπόθ}}{=} (\beta+\gamma)+(-\gamma) \overset{\Pi_3}{=}$$
$$\beta+(\gamma+(-\gamma)) \underset{\Pi_2}{=} \beta+0 \overset{\Pi_1}{=} \beta.$$

Άσκηση / Παρατήρηση → πιο μετά

$-0=0$

Λύση
$$\left.\begin{array}{l} 0+0 \overset{\Pi_1}{=} 0 \\ 0+(-0) \overset{\Pi_2}{=} 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{αντιθέτου}]{\text{Μοναδικότητα}} 0=-0$$

Μάθημα 3ο

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού (·)

(Π5): Ύπαρξη της μονάδας

Υπάρχει πραγματικός αριθμός που συμβολίζεται με 1 ώστε $1\neq0$ και $a\cdot1=a$, για κάθε πραγματικό αριθμό a

(Π6): Ύπαρξη αντιστρόφου

Για κάθε πραγματικό αριθμό $a\neq0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός που συμβολίζεται με το a^{-1} (αντίστροφος) ώστε $\alpha\cdot\alpha^{-1}=1$

(Π7) Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού

$a\cdot(\beta\cdot\gamma)=(a\cdot\beta)\cdot\gamma$ για κάθε α,β,γ πρ. αριθμούς

(Π8) Αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού

$a\cdot\beta=\beta\cdot a$ για κάθε α,β πραγμ. αριθμούς

Αουήσεις - Προτάσεις

1) Μοναδικότητα της μονάδας

Εαν μ ειναι πραγματικος αριθμος ώστε $\alpha\mu = \alpha$ για $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
τότε το μ είναι 1

2) Μοναδικότητα αντιστρόφου

Έστω $\alpha \neq 0$ εαν β ειναι πραγματικος αριθμός ώστε $\alpha \cdot \beta = 1$
τότε $\beta = \alpha^{-1}$

Η ύπαρξη του ειναι δεδομένη απο την (Π6) η μοναδικότητα
του πρέπει να αποδεχθεί

<u>Συμβολισμός</u> $\beta \neq 0$ $\quad \alpha \cdot \beta^{-1} \overset{\text{ο.τ.δ}}{=} \dfrac{\alpha}{\beta}$

3) Έστω $\alpha \neq 0$ ζ β πραγματικοί αριθμος. Η εξίσωση $\alpha \cdot x = \beta$
έχει λύση την $x = \beta \cdot \alpha^{-1}$ ζ ειναι μοναδική

4) <u>Κανονας απλοποίησης για τον πολλαπλασιασμό.</u>

Έστω $\alpha \neq 0$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha\beta = \alpha \cdot \gamma$
Τότε να αποδεχθεί $\beta = \gamma$

<u>Ερώτημα:</u> Μπορούμε να κάνουμε αριθμητική με τις Π1-Π8;
ΟΧΙ!!! $\alpha \cdot 0 = 0$ ή $(\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^{-1} \neq 0)$
ΑΝΑΓΚΑΙΑ Η ΥΠΑΡΞΗ ΤΗΣ ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗΣ ΙΔΙΟΤΗΤΑΣ

$\Downarrow$

(Π9) <u>Επιμεριστική ιδιότητα</u> (Συνδιασμός μεταξυ δύο πράξεων)
Για καθε α, β, γ πρ. αριθμούς ισχυει $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

(Η επαγωγική Μεθοδος χρησιμοποιείται μόνο σε φυσικούς αριθμούς)

Ασκήσεις / Προτάσεις

1) $a\cdot 0 = 0$ για κάθε a πραγματικό αριθμό

$a\cdot 0 \overset{\Pi_1}{=} a\cdot 0 + 0 \overset{\Pi_2}{=} a\cdot 0 + \alpha + (-a) \overset{\Pi_3}{=} (a\cdot 0 + a) + (-\alpha)$
$\overset{\Pi_5}{=} (a\cdot 0 + a\cdot 1) + (-a) \overset{\Pi_9}{=} a(0+1) + (-a) \overset{\Pi_1}{=} a\cdot 1 + (-a)$
$\overset{\Pi_5}{=} a + (-a) \overset{\Pi_2}{=} 0$

2) Δεν $\nexists a \in R : a\cdot 0 = 1$
(δηλ. το μηδέν δεν έχει αντίστροφο)
ii) Αν $\alpha \neq 0$ τότε η $\alpha^{-1} \neq 0$

Λύση: $a\cdot 0 \underset{\Pi_9}{\overset{\text{Άσκηση 1}}{=}} 0 \neq 1$ Άρα για κάθε πρ. αριθμό α ισχύει $\alpha\cdot 0$...

ii) Εάν $\alpha^{-1} = 0$ τότε $1 \overset{\Pi_8}{=} a\cdot a^{-1} \overset{\text{Άσκ. 1}}{=} 0$ Άτοπο από Π5
Άρα $\alpha^{-1} \neq 0$ Πάντοτε

3) Έστω b πραγμ. αριθμός. Τότε η εξίσωση $0\cdot x = b$ δεν έχει (ποτέ) μοναδική λύση

Λύση
- $b = 0$, $0\cdot x = 0$ έχει τουλάχιστον 2 λύσεις $(0,1)$
- $0\cdot x = 0 \neq b$, άρα δεν έχει λύση

4) $a\cdot b = 0$ Τότε: $\alpha = 0$ ή $b = 0$

Έστω $\alpha \neq 0$

$b \overset{\Pi_5}{=} b\cdot 1 \overset{\Pi_6}{=} b(\alpha\cdot\alpha^{-1}) \overset{\Pi_7}{=} (b\cdot a)a^{-1} \overset{\Pi_8}{=} (\alpha\cdot b)a^{-1} \overset{\text{υπόθ.}}{=} 0\cdot a^{-1} \underset{\Pi_9}{\overset{\text{Άσκηση 1}}{=}} 0$

Άρα $b = 0$ / Ανάλογα για $b \neq 0$

Ιδιότητες διάταξης

(Π10) Ιδιότητα της μεταβατικότητας
Αν α, β, γ πρ. αριθμοί με $\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma$.
τότε $\beta>\gamma$

(Π11) Ιδιότητες της Τριχοτομίας
Έστω α, β πρ. αριθμοί. Τότε ισχύει ακριβώς μία από τις παρακάτω σχέσεις:
$\alpha>\beta$
$\alpha<\beta$
$\alpha=\beta$

Ιδιότητες που συνδέουν πράξεις με διάταξη
(Π12) Έστω $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ Τότε $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$

(Π13) Έστω $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ $\boxed{\text{και}}$ $\gamma>0$ τότε $\alpha\gamma<\beta\gamma$

Ασκήσεις

1) i) $\alpha>\beta$ αν και μόνο αν $(\Leftrightarrow)$ $-\beta>-\alpha$
ii) $\alpha>0 \Leftrightarrow -\alpha<0$
iii) $\alpha=-\alpha \Leftrightarrow \alpha=0$

Λύση i) $\Rightarrow$ $\alpha>\beta \xrightarrow{\Pi_{12}} \alpha+(-\alpha)>\beta+(-\alpha) \xrightarrow{\Pi_2} 0>\beta+(-\alpha)$
$\xRightarrow{\Pi_{12}} -\beta+0>(-\alpha+\beta)-\beta \Rightarrow \ldots\ldots -\beta>-\alpha$

($\Leftarrow$) Αντίστροφο - ανάλογο

ii) Για $\beta=0$, $-\beta=0$ άρα i) $\alpha>0 \Leftrightarrow 0>-\alpha$

iii) ($\Leftarrow$) Εάν $\alpha=0=-0=-\alpha$ ισχύει
($\Rightarrow$) Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $\alpha=-\alpha$

Για το α ισχύει
- $\alpha>0$ τότε $\alpha=-\alpha<0$ Άτοπο διότι $\alpha<0$ και $\alpha>0$ από το Π11
- $\alpha<0$ τότε $\alpha=-\alpha>0$
- Π11: $\alpha=0$

Άρα από την αρχή της Τριχοτομίας $\alpha=0$

Από τη προηγούμενη άσκηση

2) $\left.\begin{matrix}\alpha>\beta\\ \gamma>\delta\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha+\gamma>\beta+\delta$
Πρόσθεση Ανισοτικών Σχέσεων

Έπεται από τη Π12, Π10 ✓

3) Πολλαπλασιασμός ανισοτικών σχέσεων

i) αν $\alpha>0,\ \beta>0 \Rightarrow \alpha\beta>0$ (Π13 + $0\cdot\beta=0$)

ii) αν $\alpha>0,\ \beta<0 \Rightarrow \alpha\beta<0$ από προηγούμενη άσκηση

$\alpha>0,\ -\beta>0 \xRightarrow{i)} \alpha(-\beta)=-(\alpha\cdot\beta)>0 \Rightarrow \alpha\beta<0$

iii) $\alpha<0,\ \beta<0 \Rightarrow \alpha\beta>0$

iv) $\alpha>\beta$ και $\gamma<0$ τότε $\alpha\gamma<\beta\gamma$

$\left.\begin{matrix}\alpha>\beta\\ -\gamma>0\end{matrix}\right| \xRightarrow{\Pi12} -\alpha\gamma>-\beta\gamma \Rightarrow \alpha\gamma<\beta\gamma$

4) $\alpha\neq0$ τότε $\alpha\cdot\alpha=\alpha^2>0 \rightarrow \Pi5$

Ιδιαιτέρως $1\cdot1=1>0$

$1+1>1>0$

$1>0$

$\underline{1>0}$

$1+1>0$

Προσοχή!!!

Εάν $\left.\begin{matrix}\alpha>\beta\\ \gamma>\delta\end{matrix}\right\} \not\Rightarrow \alpha\gamma>\beta\delta$

πχ $\begin{matrix}1>-1\\ 0>-1\end{matrix} \Rightarrow 0>1$ Λάθος

5) Για το Σπίτι i) $\alpha>0 \Rightarrow \alpha^{-1}>0$

ii) $\alpha>\beta>0 \Rightarrow \beta^{-1}>\alpha^{-1}>0$

Ασκήσεις για το Σπίτι

1) i) $-(-\alpha)=\alpha$ (Μοναδικ. αντιθέτου)

ii) $(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$ (Μοναδικ. αντιστρόφου, $\alpha^{-1}\neq 0$)

2) i) $(-\alpha)+(-\beta)=-(\alpha+\beta)$ (Μοναδ. αντιθέτου)

ii) $\alpha,\beta\neq 0$ $\alpha^{-1}\beta^{-1}=(\alpha\cdot\beta)^{-1}$ (Μον. αντιστρόφου, $\alpha^{-1}\beta^{-1}\neq 0$, $\alpha\beta\neq 0$)

3) $(-\alpha)\beta=\alpha(-\beta)=-(\alpha\beta)$ (Π9) & (Μον. αντιθέτου)

$(-1)\beta=-\beta$

4) $(-\alpha)(-\beta)=\alpha\cdot\beta$ (Από 3+1)

Μάθημα 4ο 17-10-2012

Θετικοί, Αρνητικοί, πρ. αριθμοί

α πραγματικός αριθμός $\begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha>0 \\ \alpha<0 \end{cases}$ Ισχύει ακριβώς ένα από αυτά. Αρχή Τριχοτομίας (Π11)

Πχ.

$a>0 \Leftrightarrow -a<0$

$1>0 \xRightarrow{\text{Π. αξίωμα}} -1<0$

$2=1+1>0 \xRightarrow{\text{ομοίως}} -2<0$

$1=2\cdot 2^{-1}$, $1>0$, $2>0 \Rightarrow \frac{1}{2}=2^{-1}>0$ ή $0<\frac{1}{2}<1$

Συμβολισμοί

a, b π. αριθμοί / $\alpha \geq b$ αν ισχύει ένα από τα $\begin{cases} \alpha=b \\ \text{ή} \\ \alpha>b \end{cases}$

Πχ. $2\geq 1$, $1\geq 1$, $a\geq a$

Άσκηση - ΘΕΜΑ ΣΕΠΤΕΜΒΡΗ 2012

Δεν $\exists$ $a>0$ τέτοιο ώστε $0<a\leq \frac{x}{2}$ για κάθε $x>0$

δηλ. δεν $\exists$ ελάχιστος θετικός αριθμός

Μου λέει ότι μεταξύ του 0 και του a δεν $\exists$ άλλος θετ. αριθμός

Λύση

Έστω ότι $\exists$ a θετικ. αριθμός: $0<a\leq x$ για κάθε $x>0$

Τα $\frac{a}{2}=2a^{-1}>0$ άρα $0<\alpha\leq\frac{a}{2}(=x) \Rightarrow 0<2\leq 1$ Άτοπο

Άρα Δεν Υπάρχει Ελάχιστος Θετικός Αριθμός

Απόλυτη τιμή πρ. αριθμού

α πραγμ. αριθμός, $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & \alpha < 0 \end{cases}$

Το μηδέν δεν είναι ούτε αρνητικός ούτε θετικός

Ισχύουν ότι $|\alpha| \geq 0$ και επίσης $|-a| = |a|$

Πρόταση:

Έστω α πρ. αριθμός

1) $-|a| \leq a \leq |a|$

2) Έστω $\varepsilon > 0$ τότε $|a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a < \varepsilon$ ←

3) Έστω $\theta \geq 0$ τότε $|a| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq a \leq \theta$ → ίδια

Απόδειξη: ($\Rightarrow$)

i) Περίπτωση 1 $a \geq 0$, $|a| = a \leq |a|$ και επίσης $-|a| \leq 0 \leq a$ $\Big\}$ $-|a| \leq a \leq |\alpha|$

Περίπτωση 2 $\alpha < 0 \Rightarrow -a > 0 \overset{\text{Περ 1}}{\Rightarrow} -|-a| \leq (-a) \leq |-a|$

Βάλαμε το $-a$ στη θέση του α στο προηγούμενο

$\Rightarrow -|a| \leq -a \leq |\alpha|$

$\Rightarrow |\alpha| \geq \alpha \geq -|\alpha|$

ii) ($\Rightarrow$) Έστω $|a| < \varepsilon$ από το 1) $-|\alpha| \leq a \leq |\alpha|$

Άρα $-\varepsilon < \alpha < \varepsilon$ ($|\alpha| < \varepsilon$, $-|\alpha| > -\varepsilon$)

($\Leftarrow$) Έστω $-\varepsilon < a < \varepsilon$

Τότε $\left.\begin{array}{l} \alpha < \varepsilon \\ -a < \varepsilon \end{array}\right\} |\alpha| < \varepsilon$

Ικανοποιεί τις των μαθηματικών τη πραγματική ανάλυση

Χαρακτηριστικές Ιδιότητες της |.|

i) $|a| \geq 0$ a πρ. αριθμός

Εάν $|a|=0$ τότε $a=0$

ii) $|\lambda a| = |\lambda||a|$ λ και a π.α. Η απόλυτος τιμή είναι θετικό φορμίς

Στπία $|-a|=|a|$

iii) $|a+b| \leq |a|+|b|$ Τριγωνική Ανισότητα

Απόδ. $-|a| \leq a \leq |a|$

$-|b| \leq b \leq |b|$ (Πις)

$$-\underbrace{(|a|+|b|)}_{\theta} \leq a+b \leq \underbrace{|a|+|b|}_{\theta}$$

Άρα από τη προηγούμενη πρόταση $|a+b| \leq |a|+|b|$

Ασκήσεις

1) a, b πρ. αριθμοί. Αποδείξτε ότι

$||a|-|b|| \leq |a-b|$

Λύση: $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|$

Άρα $|a|-|b| \leq |a-b|$

Ανάλογα ή $|b|-|a| \leq |b-a| = |a-b|$

Έχουμε $-(|a|-|b|) \leq |a-b|$

$$\Rightarrow -\underbrace{|a-b|}_{-\theta} \leq \underbrace{(|a|-|b|)}_{r} \leq \underbrace{|a-b|}_{\theta}$$

$$||a|-|b|| \leq |a-b|$$

2) a, b πρ. αριθμοί $\frac{a}{1+|a|} = \frac{b}{1+|b|}$ Αποδείξτε ότι $a=b$

Λύση:

Εφόσον εμπλέκονται $|a|$ και $|b|$ πρέπει να διακρίνω διάφορες περιπτώσεις

• Αν $a>0$ Τότε και $b>0$ Επομένως $b=|b|$ / $\Rightarrow \frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

$|a|=a$ $\leftarrow$ γτ $1+|b| \geq 1>0$

$(1+b)^{-1}>0$ / $b(1+|b|)^{-1}>0$

$\Rightarrow \alpha+\alpha b = b+\alpha b$

$\alpha = b$

• Αν $a=0 \Rightarrow b=0$

(Χρησιμοποιούμε $\gamma\delta=0 \Rightarrow \gamma=0$ ή $\delta=0$)

• Αν $a<0$, $-a>0$

Άρα $\frac{(-a)}{1+|-a|} = \frac{(-b)}{1+|-b|} \overset{\text{περ1}}{\Longrightarrow} \ldots -\alpha=-b \Rightarrow \alpha=b$

Άσκηση 3

Έστω $\varepsilon>0$ και x, y, x_0, y_0 πρ. αριθμοί

ώστε $|x-x_0| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{|y_0|+1}, 1\right\}$ * $\leftarrow$ Δε ξέρουμε ποιο είναι πιο μικρό

$|y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{|x_0|+1}$

Νδο $|xy - x_0y_0| < \varepsilon$

Λύση $|xy-x_0y_0| = |(xy-xy_0)+(xy_0-x_0y_0)| \leq |xy-xy_0|+|xy_0-x_0y_0|$

$= |x||y-y_0| + |y_0||x-x_0|$ (1)

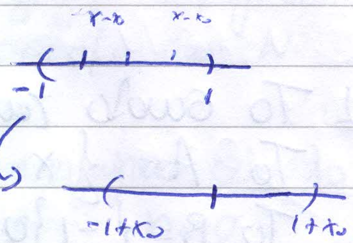
$\alpha+b$

Παίρνω το $B = |y_0||x-x_0| \overset{*}{\leq} |y_0|\left(\frac{1}{|y_0|+1}\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$

Επίσης έχουμε ότι $|x-x_0|<1$ Πρέπει να βρω κάτι που το συνδέει με το $|x|$ ή με το $|x_0|$

Όμως $||x|-|x_0|| \leq |x-x_0| < 1$

Άρα $|x|-|x_0|<1 \Rightarrow |x| < 1+|x_0|$



Επίσης έχουμε $|x||y-y_0| < 1+|x_0| \frac{1}{|x_0|+1}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Τελικά $|x||y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$,
$|y||x-x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$

Άρα από (1) $|xy-x_0y_0| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Μαθημα 5: 19-10-2012

Το σύνολο των Φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$

Ορισμός: Θεωρούμε επαγωγικό σύνολο: Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Το A είναι επαγωγικό σύνολο $\Leftrightarrow$ ισχύουν τα εξής:
- $0 \in A$
- αν $a \in A$ τότε $(a+1) \in A$

πχ.1 Το σύνολο των πραγματικών αριθμών
Το $A = \{x$ πρ. αριθμοί $: x \geq 0\}$
Το $B = \{-1\} \cup A$
} Επαγωγικά Σύνολα

πχ 2 όχι επαγωγικά: $\Gamma = \{x$ πραγμ. αριθμοί $x \leq 0\}$
$\Delta = \{x$ πραγμ. αριθμοί $x \neq 0\}$
$E = \{0, 1\}$

Προταση: A_i, $i \in I$ επαγωγικα υποσύνολα των πραγμ. αριθμών. Τοτε η τομη $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x$ πραγμ. αρ. $: x \in A_i$ για καθε $i \in I\}$ είναι επαγωγικό σύνολο

Αποδειξη → (ΑΠΟ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ)

Ορισμός $\mathbb{N}$

Το σύνολο $\mathbb{N}$ ορίζεται να είναι η τομή όλων των επαγωγικών υποσυνόλων των πραγματικών αριθμών

Ισοδύναμα: το $\mathbb{N}$ είναι το ελάχιστο επαγ. ~~υπο~~σύνολο των πραγμ. αριθμών

Ισοδύναμα: Εάν A = επαγ. ~~υπο~~σύνολο τοτε $\mathbb{N} \subseteq A$

→ Το $\mathbb{N}$ είναι επαγωγικό σύνολο (προταση)

Συμβολισμοί: $0 \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{N}$, $1+1 = 2 \in \mathbb{N}$, $2+1 = 3 \in \mathbb{N}$, $9+1 = 10 \in \mathbb{N}$

19/10/2012

"ΑΡΧΗ της ΕΠΑΓΩΓΗΣ"

i) εάν το A επαγωγικό σύνολο $\Rightarrow N \subseteq A$

ii) εάν το $B \subseteq N$, B επαγ. σύνολο τότε $B = N$
↳ επειδή ελάχιστο επαγωγικό σύνολο

Ασκήσεις (I)

Εάν το $n \in \mathbb{N}$ τότε νδο $n \geq 0$

Η αρχή της επαγωγής στηρίζεται πάνω που ορισμό του N

Λύση:

Έστω το $A = \{ x$ πραγμ. αρ.: $x \geq 0 \}$. Το A είναι επαγωγικό σύνολο $\overset{AE}{\Longrightarrow}$ το $N \subseteq A$, δηλαδή αν $n \in \mathbb{N}$ τότε $n \in A \Rightarrow n \geq 0$.

2) Δεν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < n_0 < 1$

Για να ανέβεις να ανεβαίνεις τη σκάλα πρέπει να τη βρεις

Λύση

$A = \{0\} \cup \{x$ πραγματικοί αρ. $x \geq 1\}$ επαγωγικό σύνολο

Επομένως $N \subseteq A$, δηλ αν $n \in N$ — $n = 0$ / $n \geq 1$

Άρα δεν $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < n_0 < 1$

3) $m, n \in \mathbb{N}$. Τότε $m+n$, $m \cdot n \in \mathbb{N}$

Σταθεροποιούμε το $m = m_0 \in \mathbb{N}$

$A = \{ k \in \mathbb{N} : m_0 + k \in \mathbb{N} \}$

Ψάχνω ένα σύνολο ώστε να αποδείξω ότι είναι επαγωγικό και μετά το N υποσύνολο

A: $0 \in A$ $m_0 + 0 \overset{\Pi_1}{=} m_0 \in \mathbb{N}$

Έστω $v \in A$, $m_0 + v \in \mathbb{N}$

$m_0 + v \in \mathbb{N} \xrightarrow{N \text{ επαγωγ.}} (m_0 + v) + 1 \overset{\Pi_3}{=} m_0 + (v+1) \in \mathbb{N}$

Άρα $(v+1) \in A$

Το A επαγωγικό $\subseteq N \Rightarrow A = N$

δηλ $\forall n \in \mathbb{N}$ το $m_0 + n \in N$

4) Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι κλειστό στις πράξεις $+, \cdot$
δηλ αν $m, n \in \mathbb{N}$ τότε $m+n,\ m \cdot n \in \mathbb{N}$
και ικανοποιεί τις ιδιότητες $(\Pi_1, \Pi_3, \Pi_4), (\Pi_5, \Pi_7, \Pi_8), (\Pi_9)\ (\Pi_{10} - \Pi_{13})$
Ενώ δεν ικανοποιεί τις Π_2 $(-1<0)$ και Π_6 $(0<2^{-1}<1,\ 2^{-1} \notin \mathbb{N})$

5) Εάν $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$ τότε το $n-1 \in \mathbb{N}$

Λύση: $A = \{0\} \cup \{v \in \mathbb{N} : v-1 \in \mathbb{N}\}$

$0 \in A$

Έστω $v \in A$

$v=0 \Rightarrow (v+1) = 1 \in A$

ή

$v \geq 1$ τότε από υπόθεση $v-1 \in \mathbb{N}$ τότε $v+1 \in \mathbb{N}$

$(v+1)-1 \in \mathbb{N}$

$\hookrightarrow$ $\underline{v+1 \in A}$

Θέλω $v+1 \in A$
$(v+1)-1 \in \mathbb{N}$

Έστω $n \geq 1$, τότε $n \neq -1 \Rightarrow (n \geq 1 \Rightarrow n \in \{a$ πραγμ. $a-1 \in \mathbb{N}\}$
$(n \in \mathbb{N} \subseteq A)$ δηλ αν $n \geq 1 \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N}$

6) Έστω $k_0 \in \mathbb{N}$ και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq k_0$. Τότε $n-k_0 \in \mathbb{N}$

Λύση

$A = \{k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq k \Rightarrow n-k \in \mathbb{N}\}$

Από (Άσκηση 5) A επαγωγικό

$0 \in A$ $(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 0$ ισχύει$)$

Έστω $v \in A \Rightarrow \forall n \geq v$ έχουμε $n-v \in \mathbb{N}$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ (Άσκηση 5)

$n \geq v+1 \Rightarrow v+1 \geq 1 \Rightarrow n \geq 1$

$n-1 \in \mathbb{N}$

$n-1 \geq v \Rightarrow n-(v+1) \in \mathbb{N}$ / Άρα $(v+1) \in A$

Β ημέρα

Απο αυτόθεση επαγωγής

Έστω $k \in B$ δηλ $\forall v \in \mathbb{N}$ με $v \geq k \Rightarrow \underline{v-k \in \mathbb{N}}$

Θέλω να αποδείξω $(k+1) \in B$ δηλ $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq k+1$

να έπεται $n-(k+1) \in \mathbb{N}$ / Τότε $k+1 \in B$.

$1 \in \mathbb{N},\ 1 \geq 1,\ 1-1 \in \mathbb{N}$

Έστω $n \in \mathbb{N}$: $n \geq k+1 \Rightarrow \underset{\in \mathbb{N} \text{ απο επαγ. υποθεση}}{n-k \geq 1} \Longrightarrow (n-k)-1 \in \mathbb{N} = n-(k+1) \in \mathbb{N}$

7) $A = \{k \in \mathbb{N} : m_0 \cdot k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$.

Σταθεροποιούμε το $m = m_0 \in \mathbb{N}$

$0 \in A$: $m_0 \cdot 0 \overset{\text{Αος}}{=} 0 \in \mathbb{N}$

Έστω $v \in A \Rightarrow m_0 \cdot v \in \mathbb{N}$ (απο ορισμό) $\begin{cases} m_0 v \in \mathbb{N} \\ m_0 \in \mathbb{N} \end{cases}$ (Τα προσθέτ. απο το προηγούμενο)

$m_0 v + m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \underset{\in \mathbb{N}}{(v+1)} \in \mathbb{N}$. Άρα $v+1 \in A$

* ισχύει η δεν ισχύει)

$\Rightarrow$ <u>ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ</u>

Έστω p ιδιότητα (μαθ)* ορισμένη στο $\mathbb{N}$

Γράφουμε $p(v)$, αν ισχύει για το $v \in \mathbb{N}$

Έστω ότι $\begin{cases} P(0) \text{ ισχύει} \\ \text{αν } v \in \mathbb{N} \text{ και } P(v) \text{ ισχύει, τότε η } p(v+1) \text{ ισχύει}^{*} \end{cases}$

Τότε η $P(n)$ ισχύει για $\forall n \in \mathbb{N}$ ΘΑ

<u>Απόδειξη:</u>

$A = \{k \in \mathbb{N} : P(k) \text{ ισχύει}\}$ $\begin{cases} 0 \in A \\ k \in A,\ P(k) \text{ ισχύει} \overset{*}{\Rightarrow} P(k+1) \text{ ισχύει} \end{cases}$

όλοι οι φυσικοί k που το $P(k)$ ισχύει

$\Rightarrow k+1 \in A$

A επαγωγικό

$A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} = A$

δηλ $\forall n \in \mathbb{N} (=A)$ η $P(n)$ ισχύει β)

→ Παραλλαγή Μεθόδου Επαγωγής

Έστω $k_0 \geq 1$, $k_0 \in \mathbb{N}$, P ιδιότητα ορισμένη για $v \in \mathbb{N}$, $v \geq k_0$ ότι
- $P(k_0)$ ισχύει
- αν $v \in \mathbb{N}$, $v \geq k_0$, $P(v)$ ισχύει τότε η $P(v+1)$ ισχύει

Τότε $P(n)$ ισχύει για $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq k_0$

Απόδειξη $B = \{ v \in \mathbb{N} : P(k_0+v)$ ισχύει$\}$ επαγωγικό $B = \mathbb{N}$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq k_0$. Τότε $n = (n-k_0)+k_0$

Αφού $\in \mathbb{N}$ με $n-k_0 \in B$

άρα η $P(k_0+(n-k_0)) = P(n)$ ισχύει

*
- $0 \in B$ γτ $P(k_0)$ ισχύει από την υπόθεση
- Έστω ένα $v \in B \Rightarrow P(k_0+v)$ ισχύει $\xrightarrow{\text{Επ. υπόθ}}$ $P(k_0+v+1)$ ισχύει

Άρα $v+1 \in B$ $B = \mathbb{N}$

Μάθημα 6ο: 23/10/12

Έπρεπε να έχουμε ανεβεί μέχρι το ν σεξάγωνα τις.

(II) α) Έστω P ιδιότητα ορισμένη στο $\mathbb{N}$, ώστε
- $P(0)$
- αν $v \in \mathbb{N}$, και $P(0), P(1) \ldots P(v)$ ισχύουν, τότε $P(v+1)$ ισχύει

Τότε $P(n)$ ισχύει για καθε $n \in \mathbb{N}$

Υποδ. $A = \{ v \in \mathbb{N} : P(0), P(1) \ldots P(v)$ ισχύουν$\}$ επαγωγικό / $A = \mathbb{N}$

β) * Έστω k_0 και P ιδιότητα ορισμένη για $v \geq k_0$ ($v \in \mathbb{N}$) ώστε
- $P(k_0)$ ισχύει
- αν $v \geq k_0$ και $P(k_0), \ldots P(v)$ ισχύουν τότε $P(v+1)$ ισχύει

Το συμπέρασμα: Τότε η $P(n)$ ισχύει για $\forall n \geq k_0$ ($n \in \mathbb{N}$)

Συμβολισμοί

α πραγμ. αρ. $a^{+1}=a$

$n \in \mathbb{N}$ κ $n \geq 1$ $\quad a^{n+1}=(a^n)a$

$a \neq 0$ $\quad a^0=1$

Έστω $a_1, a_2 \dots a_\nu$ πρ. αριθμοί

$((((a_1+a_2)+a_3)+a_4)+a_5) \dots)$

Επειδή ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα κ η μεταθετική ιδιότητα ΔΕΝ παίζει σημασία η σειρά της άθροισης

Οπότε $a_1+a_2+\dots+a_\nu$

Συμβολισμός $\sum_{n=1}^{\nu} a_n$ ή $\sum_{i=1}^{\nu} a_i$ ή $\sum_{j=1}^{\nu} a_j$ ή $\sum_{k=0}^{\nu-1} a_{k+1}$

$$\sum_{i=1}^{n} n = \underbrace{(1+1+1+1\dots+1)}_{n} n = n^2$$

$$= \underbrace{n+n+n+\dots+n}_{n} = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a+a+a\dots+a}_{n}$$

Ασκήσεις (I)

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n \in \mathbb{N}$

Τότε i) $\begin{cases} \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n \in \mathbb{N} \\ \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \nu_3 \cdots \nu_n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ισχύει για $n=2$ (αποδείχθει)

→ Σπίτι

Έστω $\nu \geq 2$ .. τότε ισχύει για $\nu+1$

ii) $n \geq 2$

$a_1, a_2 \ldots a_n > 0$ τότε

$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 0 & \Pi_1 \\ a_1 \cdot a_2 + \ldots a_n > 0 & \Pi_2 \end{cases}$

iii) $n \geq 2$ $\left.\begin{matrix} a_1 > b_1 > 0 \\ a_2 > b_2 > 0 \\ \vdots \\ a_n > b_n > 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow a_1 \ldots a_n > b_1 \ldots b_n > 0$

Χρησιμοποιούμε μαθηματική επαγωγή το 1 β)

2) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Ο n καλείται πρώτος αριθμός $\Leftrightarrow$ (αν $n = m \cdot \nu$ όπου $m, \nu \in \mathbb{N}$ τότε $m=1$ ή $\nu=1$)

<u>Αν</u> $n \geq 2$ και δεν είναι πρώτος καλείται σύνθετος

πχ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 πρώτοι

σύνθετοι $4 = 2 \cdot 2$, $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

"Ο τελευταίος γνωστός πρώτος είναι ο $2^{43112609} - 1$

περίπου 13 εκατομ. ψηφία

Ανακαλύφθηκε μέσω υπολογιστή το 2008"

Εστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν πρώτοι αριθμοί $p_1, p_2 .. p_\nu (\in \mathbb{N})$ - όχι υποχρεωτικά διαφορετικοί μεταξύ των ώστε $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_\nu$

Λύση Για $n=2$ πρώτος

Εστω ότι $k \geq 2$ αναλύεται και $2, 3 .. k-1, k$ αναλύεται

Θα δείξουμε ότι $(k+1)$ αναλύεται ∇

$k+1$ → πρώτος ή → Σύνθετος $m = \lambda \cdot \mu$ όπου $2 \leq \lambda, \mu \leq m$ ($\in \mathbb{N}$) αφού σύνθετος $\lambda, \mu \neq 1$

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αναλύσουμε το 112, έχουμε αναλύσει το 111 σε πρώτους ή σε πρώτους, έχουμε υποθέσει ότι έχουμε αναλύσει όλους τους άλλους — αν 112 πρώτος - τέλος; αλλιώς σύνθετος τότε θα $\exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{N}$

πχ. $112 = \underset{\lambda}{2} \cdot \underset{\leq k}{56}$

Εφόσον $2 \leq \lambda, \mu \leq k$

Επαγωγική Υπόθεση (ΙΙβ)

αφού λ, μ αναλύονται άμεσα

$\lambda = p_1 \cdot p_2 \cdots p_\lambda$ $\quad p_i$ = πρώτοι

$\mu = q_1 \cdot q_2 \cdots q_\mu$ $\quad q_j$ = πρώτοι

Αρα $k+1 = p_1 \cdot p_2 .. p_\lambda \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_\mu$

Αρα από (ΙΙβ) $\forall n \geq 2$ αναλύεται σε πρώτους

$100 = 4 \cdot 25$

$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

Ασκήσεις (II)

1) i) $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$

ii) $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii) $1^3+2^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Λύση: (i, iii για το σπίτι)

Για $n=1$ $1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ ισχύει

Έστω $1^3+2^3+\dots+v^3 = \left[\frac{v(v+1)}{2}\right]^2$ ότι ισχύει για v

Παίρνουμε $1^3+2^3+\dots v^3 + (v+1)^3 \overset{\text{Επαγ. υπόθ.}}{=} \frac{v^2(v+1)^2}{} + (v+1)^3$

$= \frac{(v+1)^2}{2}\left[v^2+4v+4\right] = \left(\frac{v+1}{2}\right)^2 (v+2)^2 = \left[\frac{(v+1)((v+1)+1)}{2}\right]^2$

Άρα ισχύει για το $n+1$

Μ-Ε (Ι, Β) ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n\geq 1$

2) Έστω $n\geq 1$. Αποδείξτε ότι $\exists$ $a_n\in\mathbb{N}$ ώστε

$7^n - 4^n = 3a_n$

Λύση

Για $n=1$ $7^1-4^1 = 3a_1$ δηλ. $7^1-4^1 = 3\cdot 1$ $(a=1)$

Έστω ότι $v\geq 1$ και $a_n\in\mathbb{N}$ $7^v-3^v = 3a_v$ *

$7^{v+1}-4^{v+1} = 7\cdot 7^v - 4\cdot v^v = 4\cdot 7^v + 3\cdot 7^v - 4 4^v$

$= 4(7^v-4^v) + 3\cdot 7^v \overset{*}{=}$

$= 4-3a_v + 3\cdot 7^v$

$= 4-3a_v + 3 7^v$

$= 3(\underbrace{4a_v + 7^v}_{\in\mathbb{N}}) = 3a_{v+1}$ $a_{v+1} = 4a_v + 7 \in\mathbb{N}$

Από ΜΕ έχουμε ότι ισχύει $\forall n\geq 1$

3) i) $2^n > n$ για $n \geq 1$ → Σπίτι
ii) $2^n > n^3$ για $n \geq 10$ → από το Ια γι είναι από τα σημείο ή μετα

Για $n=10$ $\quad 2^{10} > 10^3$ ισχυα
Εστω οτι ισχυει για $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 10$
$2^{v+1} = 2 \cdot 2^v > 2 \cdot v^3 \underset{(a)}{\geq} (v+1)^3$ Απο Μ.Ε η σχεση ισχυει για $\forall v \geq 10$

$2v^3 > (v+1)^3 \Leftrightarrow v^3 + v^3 > v^3 + 3v^2 + 3v + 1$
$\Leftrightarrow v \geq 10$
$v^3 = v \cdot v^2 \geq 10v^2 = 3v^2 + 7v^2 > 3v + \underline{3v+1}$
$v^2 \geq 10v$

24/10/2012 - Μάθημα 7ο

Μαθηματικη επαγωγη: χρησιμη οταν θελουμε να δειξουμε οτι κάτι ισχυει για φυσικους αριθμους

4) i) Εστω $a > -1$, $a \neq 0$ Τοτε $(1+a)^n > 1+na$, $n \geq 2$
Αν $a \geq -1$ τοτε $(1+a)^n \geq 1+na$, $n \geq 1$
Ανισοτητα Bernoulli

ii) Εστω $0 < \beta < 1$ Τοτε $1 - n\beta < (1-\beta)^n < \dfrac{1}{1+n\beta}$ $\quad n \geq 2$

Θα τη χρησιμοποιησουμε για να αποδειξουμε την διαφορη του e στις ακολουθιες.

<u>Λύση</u> : i) Έστω $\alpha > -1 \Rightarrow \alpha + 1 > 0$

Για $n=2$ $(1+a)^2 = 1+2a+a^2 > 1+2a$ ισχύει

$(a^2 > 0 , \alpha \neq 0)$

Επαγωγική υπόθεση ότι το ν ανήκει στο σύνολο αλήθειας πρέπει νδο ότι το $\nu+1$ ανήκει

Έστω ότι ισχύει για $\nu \geq 2$ δηλ. $(1+a)^\nu > 1+\nu a$ *

$(1+a)^{\nu+1} = (1+a)^\nu (1+a) > (1+a\nu)(1+a)$ $\quad (1+a) > 0$

$= 1+\nu a + a + \nu a^2 > 1 + \nu a + a = 1+(\nu+1)a$

Άρα $(1+a)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)a$ δηλ ισχύει για $(\nu+1)$

Επομένως από (Ιβ) ισχύει $(1+a)^n > 1+na$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Για το δεύτερο κομμάτι, παρόμοια δουλειά.

ii) $0<\beta<1$ Τότε $-\beta > -1$ ισχύει ο Bernoulli

Επομένως από (i)

Θέτουμε στην (i) για $\alpha = -\beta$

$(1+(-\beta))^n > 1+n(-\beta)$ για $n \geq 2$

δηλ $\boxed{(1-\beta)^n > 1-n\beta \quad n \geq 2}$ (1)

Ισχύει ότι $0 < 1-\beta < \dfrac{1}{1+\beta}$ ⊛ Εξήγηση για $n=1$

$$\left\{ \text{διότι } 1-\beta < \frac{1}{1+\beta} \underset{\beta>0}{\Longleftrightarrow} (1-\beta)(1+\beta) < 1 \Leftrightarrow 1-\beta^2 < 1 \Leftrightarrow \beta^2 > 0 \text{ ισχύει γτ } \beta \neq 0 \right\}$$

* Τα υψώνω εις την n

$$(1-\beta)^n < \frac{1}{(1+\beta)^n} \underset{0<\beta<1}{\overset{\text{Bernoulli}}{<}} \frac{1}{1+n\beta} \quad \text{για } n\geq 2$$

Χρησιμοποίησα τα εξής
$0<a_1<b_1$
$0<a_2<b_2$
$0<a_1 a_2<b_1 b_2$

Τελικά από (1),(2) $0<\beta<1$

$$\boxed{1-n\beta < (1-\beta)^n < \frac{1}{1+n\beta},\ n\geq 2}$$

Άσκηση 5 Γιαννόπουλου - Φαβέρη -
Θα χρησιμοποιήσει αργότερα.

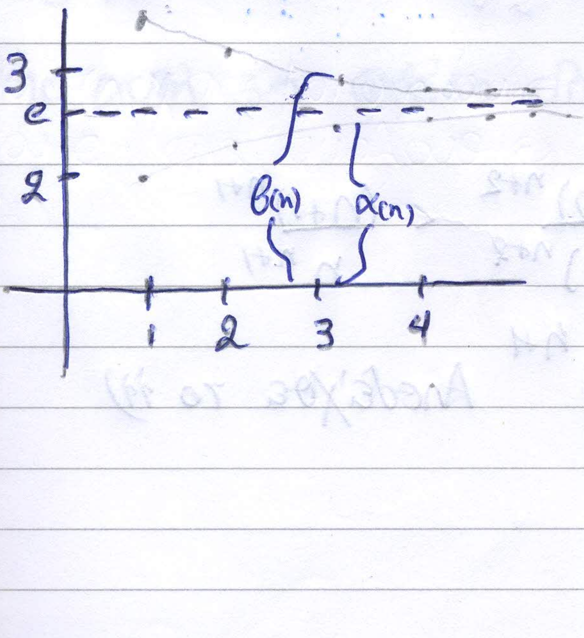
$a: \mathbb{N}-\{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad a(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ → a, b είναι απεικονίσεις αντί να γραφτεί $f(x)$ ή $g(x)$

$b: \mathbb{N}-\{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad b(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Νδο i) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, $n\geq 1$

ii) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$, $n\geq 1$

iii) $2 < a(n) < a(n+1) < b(n+1) < b(n) < 3$ για $\underline{n\geq 4}$



→ Ο αριθμός που συγκλίνουν τα δύο όρια είναι το e

Ζωγραφίζω την $a(n)$ αύξουσα και την $b(n)$ φθίνουσα

Πρέπει να τη θυμάμαι αλλιώς απο Μεγρεσάθυνση ή Spivak η απόδειξη

Ξέρουμε απο Άσκηση 4 (σελ 25-26) ότι
αν $0<\beta<1$ $\quad 1-(n+1)\beta < (1-\beta)^{n+1} < \dfrac{1}{1+(n+1)\beta}$ για $n\geq 1$

Έμπνευση !!! $\quad 0<\beta = \dfrac{1}{(n+1)^2} < 1$

Κάνω αντικατάσταση:

$$1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2} < \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} < \frac{1}{1+(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}}$$

(1) $\dfrac{n}{n+1} = 1-\dfrac{1}{n+1} < \left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \dfrac{(n+2)^{n+1}\, n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^{n+1}}$

αυτό απο κάτω αναχιαστά

↳ αυτό απο πάνω

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Αποδείξαμε το i)

(2) $\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} < \dfrac{n+1}{n+2}$

$$\frac{n^{n+1}(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^{n+1}} < \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}} < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$ Αποδείχθα το ii)

Άσκηση 6

Διωνυμικό Ανάπτυγμα (Newton)

$n \in \mathbb{N}$, $0! = 1$ $\quad (n+1)! = n+1 \cdot (n!)$

πχ. $1! = 1$ $\quad 2! = 1 \cdot 2$ $\quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ $\quad n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n \quad n \geq 2$

Παίρνουμε $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$n \geq 2 \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

<u>Τύπος Pascal !!!</u>

Έχεις n και μία n γραμμή(?) => όλοι (n+1)

Ας πούμε ότι παίρνουμε ανά 3

Πρώτα έμας ανά 3άδες και μετά αφήνω να πάρει τον εαυτό της και να τον βάλει ανά δυάδες

Άσκηση Για το Σπίτι: Ο τύπος του Pascal να αποδειχθεί

Από αυτή τη σχέση δίνεται το τρίγωνο του Pascal

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ (γτ για μηδέν προφανώς ισχύει) και επίσης $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i) $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n, \ n \geq 1$

Διωνυμική

↳ii) $(a+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \beta^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\beta + \binom{n}{2} \alpha^{n-2}\beta^2 + \dots \binom{n}{n}\beta^n$

Αν αποδείξουμε το i) και το ii) αποδεικνύεται

Λύση

i) Για $n=1$ $(1+x)^1 = 1+x$ ισχύει

$\nu \geq 1$ και $(1+x)^\nu = 1 + \binom{\nu}{1} x + \binom{\nu}{2} x^2 + \dots + \binom{\nu}{\nu} x^\nu$

Θέλω να δ για $\nu+1$

$(1+x)^{\nu+1} = (1+x)^\nu (1+x) \underset{\text{υποθ}}{\overset{\text{από επαγ}}{=}} 1 + \binom{\nu}{1} x + \binom{\nu}{2} x^2 + \binom{\nu}{3} x^3 + \dots \binom{\nu}{\nu} x^\nu +$

$+ \quad x + \binom{\nu}{1} x^2 + \binom{\nu}{2} x^3 + \dots + x^{\nu+1}$

$1 + (\nu+1) x + \binom{\nu+1}{2} x^2 + \binom{\nu+1}{3} x^3 + \dots x^{\nu+1} =$

$1 + \binom{\nu+1}{1} x + \binom{\nu+1}{2} x^2 + \binom{\nu+1}{3} x^3 + \dots \binom{\nu+1}{\nu+1} x^{\nu+1}$

Άρα ο τύπος ισχύει για $(\nu+1)$

Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής η σχέση ισχύει για $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$

ii) $a \neq 0$ $(a+\beta)^n = a^n \left(1 + \left(\frac{\beta}{a}\right)^n\right)$

ζ) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}=2n$

Λύση:

$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots\binom{n}{n}x^n$, $n\geq 1$

η) Έστω $A=\{x_1,x_2..x_n\}$ τυχαίο σύνολο με διακριτά σημεία πόσα υποσύνολα έχει?

$\Rightarrow$ Το πλήθος των υποσυνόλων είναι 2^n

8) Έστω $a\geq 0$ Τότε $(1+a)^n \geq 1+an \geq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$ $n\geq 1$

$a\geq 0 \Rightarrow \alpha^3\geq 0, \alpha^5\geq 0, \alpha^n\geq 0\ \forall n$

Επομένως $(1+a)^n = 1+na+\frac{n(n-1)a^2}{2}+\binom{n}{3}a^3+\dots\binom{n}{n}a^4$

$\geq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2$