ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Αλγεβρική δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζουμε με R, έχει δύο πράξεις, την πρόσθεση (+) και τον πολλαπλασιασμό (.), και μια σχέση διάταξης (<).

Ιδιότητες της πρόσθεσης

- **(Π1) Ύπαρξη του μηδενός**

  Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε με 0 (μηδέν)

  $$\alpha+0=\alpha$$

  για κάθε πραγματικό αριθμό α.
- **(Π2) Ύπαρξη του αντιθέτου**

  Για κάθε πραγματικό αριθμό α, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε –α και λέγεται αντίθετος του α, ώστε

  $$\alpha+(-\alpha)=0$$
- **(Π3) Προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης**

  $$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ.
- **(Π4) Αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης**

  $$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ
Μοναδικότητα του μηδενός.

Αν μ πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $\alpha + \mu = \alpha$ για κάθε πραγματικό αριθμό α, τότε $\mu = 0$.

Απόδειξη.

Από την ιδιότητα του μ έχουμε $0+\mu=0$.

Από την (Π1) έχουμε $\mu+0 = \mu$.

Από την (Π4) και τα παραπάνω έχουμε

$$0 = 0 + \mu = \mu + 0 = \mu$$

Μοναδικότητα του αντιθέτου.

Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί και

α + β = 0 τότε β=-α.

Απόδειξη.

β = β+0	(Π1)
=β + (α+(-α))	(Π2)
=(β + α) + (-α)	(Π3)
= (α + β) + (-α)	(Π4)
= 0 + (-α)	(υπόθεση για τον β)
=(-α) + 0	(Π4)
= -α	(Π1)

- Συμβολισμός

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί θέτουμε

$$α – β = α+(-β)$$

Αξιώματα πολλαπλασιασμού

- **(Π5) Ύπαρξη της μονάδας**

  Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός, που τον συμβολίζουμε με 1 (μονάδα), ώστε

  $$1 \neq 0 \text{ και } \alpha . 1 = \alpha$$

  για κάθε πραγματικό αριθμό α.
- **(Π6) Ύπαρξη αντιστρόφου**

  Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ υπάρχει πραγματικός αριθμός που τον συμβολίζουμε α^{-1} (αντίστροφος του α), ώστε

  $$\alpha . \alpha^{-1} = 1$$
- **(Π7) Προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιαμού**

  $$\alpha .(\beta . \gamma) = (\alpha . \beta). \gamma$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ.
- **(Π8) Αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιαμού**

  $$\alpha . \beta = \beta . \alpha$$

  για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β.

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και β≠0 θέτουμε

$$\alpha/\beta = \alpha.\beta^{-1}$$

- **Π9. Επιμεριστική ιδιότητα**

$\alpha.(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha.\gamma$

για κάθε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ.

Αξιώματα της διάταξης

- **(Π10) Ιδιότητα μεταβατικότητας**

  Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί και

  $$\boldsymbol{\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma \quad \text{τότε } \alpha > \gamma}$$

- **(Π11) Ιδιότητα της τριχοτομίας**

  Για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ακριβώς μια από τις παρακάτω σχέσεις

  $$\boldsymbol{\alpha = \beta,\ \alpha < \beta,\ \beta < \alpha}$$

Αξιώματα που συνδέουν τις πράξεις με την διάταξη

- **(Π12) Διάταξη και πρόσθεση**

  Αν α, β πραγματικοί αριθμοί και

  α > β τότε α + γ > β + γ

  για κάθε πραγματικό αριθμό γ.

- **(Π13) Διάταξη και πολλαπλασιασμός**

  Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με

  α > β και γ>0 τότε α.γ > β.γ