7 Όρια συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε αυστηρά τί σημαίνει «το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει (πλησιάζει) στο x_o». Για να έχει έννοια το όριο, πρέπει να μπορούμε να πλησιάσουμε *οσοδήποτε κοντά στο* x_o, με σημεία του πεδίου ορισμού X της f, διαφορετικά από το x_o. Πρέπει λοιπόν πρώτα να διευκρινίσουμε τί σημαίνει «το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X».

7.1 Σημεία συσσώρευσης συνόλων

Ορισμός 7.1 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ και έστω $x_o \in \mathbb{R}$. Το x_o λέγεται* ***σημείο συσσώρευσης*** *του X αν* ***κάθε*** *περιοχή $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ του x_o περιέχει ένα (τουλάχιστον) σημείο του X* ***εκτός*** *του x_o, δηλαδή αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $0 < |x - x_o| < \delta$.*

Δηλαδή το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X αν μπορεί να προσεγγισθεί οσοδήποτε κοντά από σημεία του $X \setminus \{x_o\}$. Το ίδιο το x_o μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο X.

Ορισμός 7.2 *Αν $X \subseteq \mathbb{R}$ και x_o ένα σημείο του X, τότε το x_o λέγεται* ***μεμονωμένο σημείο του*** *X αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X, δηλ. αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_o - \delta, x_o + \delta) \cap X = \{x_o\}$.*

Παράδειγμα 7.1 *Αν $X = [a, b]$, κάθε σημείο του X είναι σημείο συσσώρευσης. Αν $X = (a, b]$, κάθε σημείο του X είναι σημείο συσσώρευσης, και επίσης το a είναι σημείο συσσώρευσης του X.*

Το σύνολο $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης. Επομένως όλα τα σημεία του X είναι μεμονωμένα.

Αν $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ τότε όλα τα σημεία του X είναι μεμονωμένα, και το 0 είναι το μόνο σημείο συσσώρευσης του X.

Αν $X = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$ τότε όλα τα σημεία του X είναι μεμονωμένα, και τα $1, -1$ είναι τα μόνα σημεία συσσώρευσης του X.

Αν το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X, κάθε περιοχή του x_o περιέχει όχι μόνον ένα, αλλά άπειρα σημεία του $X \setminus \{x_o\}$. Μάλιστα, υπάρχει ακολουθία σημείων του $X \setminus \{x_o\}$ που συγκλίνει στο x_o:

Πρόταση 7.2 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ και έστω $x_o \in \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(ι) *Το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X.*

(ιι) *Κάθε περιοχή $(x_o-\delta, x_o+\delta)$ του x_o περιέχει άπειρα σημεία του X.*

(ιιι) *Υπάρχει μια ακολουθία (x_n) με $x_n \in X$ για κάθε n και $x_n \neq x_m$ όταν $n \neq m$, ώστε $x_n \to x_o$.*

Απόδειξη (ι)⇒ (ιι) Κάθε περιοχή του x_o περιέχει σημεία του X διαφορετικά από το x_o. Αν για κάποιο $\delta > 0$ υπήρχε μόνο πεπερασμένο πλήθος σημείων του X στην περιοχή $(x_o-\delta, x_o+\delta)$, ένα (τουλάχιστον) από αυτά θα ήταν πλησιέστερο στο x_o. Αν $\delta_1 > 0$ ήταν η απόσταση του σημείου αυτού από το x_o, τότε στην περιοχή $(x_o-\delta_1, x_o+\delta_1)$ δεν θα υπήρχε κανένα σημείο του $X \setminus \{x_o\}$, οπότε το x_o δεν θα ήταν σημείο συσσώρευσης του X.

(ιι)⇒ (ιιι) Κατασκευάζουμε *επαγωγικά* την ακολουθία (x_n) από στοιχεία του X ώστε $x_n \in (x_o-\frac{1}{n}, x_o+\frac{1}{n})$ για κάθε n (οπότε σίγουρα θα έχουμε $x_n \to x_o$) και φροντίζοντας ώστε κάθε x_n να είναι διαφορετικό από τα προηγούμενα:

Αφού στην περιοχή (x_o-1, x_o+1) υπάρχουν άπειρα στοιχεία του X, θα υπάρχει ένα, έστω x_1, διαφορετικό απ'το x_o.

Αφού στην περιοχή $(x_o-\frac{1}{2}, x_o+\frac{1}{2})$ υπάρχουν άπειρα στοιχεία του X, θα υπάρχει ένα, έστω x_2, διαφορετικό απ'το x_o και από το x_1.

Αν έχουμε κατασκευάσει $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in X$ διαφορετικά μεταξύ τους (και από το x_o) ώστε $x_k \in (x_o-\frac{1}{k}, x_o+\frac{1}{k})$ για $k = 1, 2, \ldots, n-1$, αφού στην περιοχή $(x_o-\frac{1}{n}, x_o+\frac{1}{n})$ υπάρχουν άπειρα στοιχεία του X, θα υπάρχει ένα, έστω x_n, διαφορετικό απ' όλα τα προηγούμενα.

Έτσι ολοκληρώθηκε η επαγωγική κατασκευή της ακολουθίας (x_n).

(ιιι)⇒ (ι) Αν υπάρχει ακολουθία (x_n) διαφορετικών ανά δύο σημείων του X που συγκλίνει στο x_o, τότε για κάθε $\delta > 0$ θα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n - x_o| < \delta$ για κάθε $n \geq n_o$, και αφού οι όροι της ακολουθίας είναι διαφορετικοί, κάποιος από αυτούς θα είναι διαφορετικός απ'το x_o, οπότε θα ανήκει στο σύνολο $(x_o-\delta, x_o+\delta) \cap X \setminus \{x_o\}$. □

Πρόταση 7.3 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν $x_o \in X$ είναι μεμονωμένο σημείο, τότε η f είναι συνεχής στο x_o.*

Απόδειξη Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρώ $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $|x - x_o| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_o)| < \epsilon$.

Μα αφού το x_o είναι μεμονωμένο σημείο του X, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το μόνο $x \in X$ που ικανοποιεί $|x - x_o| < \delta$ να είναι το ίδιο το x_o. Επομένως αν $x \in X$ και $|x - x_o| < \delta$ τότε $x = x_o$ οπότε $|f(x) - f(x_o)| = 0 < \epsilon$. □

Πρόταση 7.4 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ και $f, g : X \to \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις. Αν $x_o \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του X και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in X \setminus \{x_o\}$, τότε $f(x_o) = g(x_o)$.*

Απόδειξη Έστω (x_n) ακολουθία στοιχείων του $X \setminus \{x_o\}$ που συγκλίνει στο x_o (αφού το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X, υπάρχει τέτοια ακολουθία). Αφού οι f και g είναι συνεχείς, έχουμε $f(x_n) \to f(x_o)$ και $g(x_n) \to g(x_o)$. Αλλά $x_n \in X \setminus \{x_o\}$, άρα $f(x_n) = g(x_n)$ για κάθε n, και συνεπώς

$$f(x_o) = \lim_n f(x_n) = \lim_n g(x_n) = g(x_o). \quad \square$$

7.2 Όρια συναρτήσεων

Ορισμός 7.3 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_o \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του X (το x_o μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού X της f).*

(ι) *Λέμε ότι* ***το όριο της f καθώς το $x \to x_o$ υπάρχει και ισούται με*** *τον αριθμό $y_o \in \mathbb{R}$ αν:*

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

αν $x \in X$ και $0 < |x - x_o| < \delta$ τότε $|f(x) - y_o| < \varepsilon$.

Γράφουμε τότε $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = y_o$.

(ιι) *Λέμε ότι η f* ***τείνει στο $+\infty$ καθώς το*** *$x \to x_o$ αν:*

Για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

αν $x \in X$ και $0 < |x - x_o| < \delta$ τότε $f(x) > M$.

(ιιι) *Λέμε ότι η f* ***τείνει στο $-\infty$ καθώς το*** *$x \to x_o$ αν:*

Για κάθε $M < 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

αν $x \in X$ και $0 < |x - x_o| < \delta$ τότε $f(x) < M$.

Σημειώνουμε ότι η ύπαρξη του ορίου έχει σχέση με την συμπεριφορά της f **κοντά** στο x_o. Επομένως, προϋπόθεση για την ύπαρξη του ορίου είναι το x_o να είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού X της συνάρτησης. Στο ίδιο το x_o η f μπορεί να μην ορίζεται καθόλου. Αλλά και αν ορίζεται, η τιμή $f(x_o)$ δεν ενδιαφέρει όσον αφορά στην ύπαρξη του ορίου.

Παραδείγματα 7.5 *(i)* $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

(ii) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \neq 3 \\ 0 & \text{αν } x = 3 \end{cases}$, το όριο $\lim_{x \to 3} f(x)$ υπάρχει και ισούται με 9.

(iii) Το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ *δεν υπάρχει.*
(iv) Αν $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *με* $f(x)=\frac{1}{x}$, *τότε* $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$.
(v) Το όριο $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ *δεν υπάρχει.*
(vi) Αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *με* $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ \frac{1}{n} & \text{αν } x=\frac{m}{n} \text{ με } (m,n)=1 \end{cases}$
τότε για κάθε $x_o\in[0,1]$ *το όριο* $\lim_{x\to x_o} f(x)$ *υπάρχει και ισούται με 0.*

Απόδειξη Τα $(i),(ii)$ και (iv) αποτελούν απλές εφαρμογές του ορισμού. Τα (iii) και (v) αποδεικνύονται ευκολότερα με χρήση της αρχής της μεταφοράς (βλ. παρακάτω).

Απόδειξη του (vi) Έστω $\varepsilon>0$. Θα δείξω ότι, για κάθε $x\in[0,1]$ «αρκετά κοντά» στο x_o, αλλά με $x\neq x_o$, ισχύει ότι $|f(x)-0|<\varepsilon$. Ας διαλέξουμε έναν φυσικό αριθμό k ώστε $\frac{1}{k}\leq\varepsilon$. Αν για κάποιο $x\in[0,1]$ **δεν** ισχύει η σχέση $|f(x)-0|<\varepsilon$, τότε ισχύει $f(x)\geq\frac{1}{k}$, άρα (από τον ορισμό της f) ο x θα είναι ρητός, ανάγωγο κλάσμα $\frac{m}{n}$ με παρονομαστή μικρότερο ή ίσο με k. Δηλαδή οι τιμές του x που πρέπει να αποκλείσουμε είναι

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\ldots,\frac{1}{k},\ldots,\frac{k-1}{k}.$$

Το πλήθος αυτών των αριθμών είναι πεπερασμένο, επομένως υπάρχει μια περιοχή $(x_o-\delta,x_o+\delta)$ που δεν περιέχει κανέναν απ'αυτούς, εκτός (ενδεχομένως) από το x_o. Άρα για κάθε $x\in[0,1]$ με $0<|x-x_o|<\delta$ θα έχουμε αναγκαστικά $|f(x)|<\frac{1}{k}$, άρα $|f(x)-0|<\varepsilon$. $\square$

Πρόταση 7.6 (Αρχή της μεταφοράς) *Έστω* $X\subseteq\mathbb{R}$, *έστω* $f:X\to\mathbb{R}$ *μια συνάρτηση,* $x_o\in\mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* X *και* $y_o\in\mathbb{R}$. *Τότε το* $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ *υπάρχει και ισούται με* y_o *αν και μόνον αν* ***για κάθε ακολουθία*** (x_n) *με* $x_n\in X\setminus\{x_o\}$ *για κάθε* n *τέτοια ώστε* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_o$, *η ακολουθία* $(f(x_n))$ *συγκλίνει, και μάλιστα στο* y_o.

Απόδειξη Υποθέτουμε πρώτα ότι το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ υπάρχει και ισούται με y_o. Τότε για κάθε $\varepsilon>0$ θα υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x\in X$ και $0<|x-x_o|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-y_o|<\varepsilon$.

Έστω (x_n) μια (τυχαία) ακολουθία με $x_n\in X\setminus\{x_o\}$ για κάθε n, που συγκλίνει στο x_o. Θα υπάρχει τότε $n_o\in\mathbb{N}$ ώστε $|x_n-x_o|<\delta$ για κάθε $n\geq n_o$. Μάλιστα εφόσον $x_n\neq x_o$ θα έχουμε $0<|x_n-x_o|<\delta$. Επομένως από την προηγούμενη παράγραφο έχουμε $|f(x_n) - y_o| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_o$. Αφού το ε είναι αυθαίρετο, δείξαμε ότι η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο y_o.

Έστω αντίστροφα ότι, για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in X \setminus \{x_o\}$ που συγκλίνει στο x_o, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο y_o. Θα δείξουμε τότε ότι το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ υπάρχει και ισούται με y_o.

Πράγματι αν αυτό δεν ισχύει τότε θα υπάρχει κάποιος θετικός αριθμός ε ώστε *για κανένα* $\delta > 0$ *να μην ισχύει* η συνεπαγωγή

«αν $x \in X$ και $0 < |x - x_o| < \delta$ τότε $|f(x) - y_o| < \varepsilon$».

Τότε *για κάθε* δ της μορφής $\delta = \frac{1}{n}$

θα υπάρχει $x_n \in X$ με $0 < |x_n - x_o| < \frac{1}{n}$ αλλά $|f(x_n) - y_o| \geq \varepsilon$.

Σχηματίζουμε την ακολουθία (x_n): Έχουμε $x_n \in X$ και $x_n \neq x_o$ (εφόσον $0 < |x_n - x_o|$) για κάθε n και $x_n \to x_o$ (εφόσον $|x_n - x_o| < \frac{1}{n}$ για κάθε n). Αλλά $|f(x_n) - y_o| \geq \varepsilon$ για κάθε n, επομένως η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο y_o. $\square$

Παρατήρηση *Δεν αρκεί για την ύπαρξη του ορίου* $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ *να ισχύει η συνθήκη της πρότασης* για κάποια ακολουθία (x_n). *Πρέπει να ισχύει για όλες* τις ακολουθίες που ικανοποιούν $x_n \in X \setminus \{x_o\}$ για κάθε n και $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_o$.

Για παράδειγμα αν f είναι η συνάρτηση Dirichlet ($f(q) = 1$ αν q ρητός, $f(t) = 0$ αν t άρρητος) τότε $\lim\limits_{n \to \infty} f(\dfrac{1}{n}) = 1$, αλλά το όριο $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχει (γιατί;). Το ίδιο συμβαίνει και στην επόμενη εφαρμογή.

Εφαρμογή *Τα όρια* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ *και* $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ *δεν υπάρχουν.*

Απόδειξη Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{\pi n}$ και $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 2\pi n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Παρατηρούμε ότι $x_n \neq 0 \neq y_n$ για κάθε n και ότι $\lim_n x_n = 0 = \lim_n y_n$. Όμως αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, τότε τα όρια $\lim_n f(x_n)$ και $\lim_n f(y_n)$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους (είναι $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα). Επίσης τα όρια $\lim_n g(x_n)$ και $\lim_n g(y_n)$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους (είναι 0 και 1 αντίστοιχα).

Πρόταση 7.7 *Έστω* $X \subseteq \mathbb{R}$, *έστω* $f : X \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση και έστω* $x_o \in X$ *ένα σημείο συσσώρευσης του* X. *Τότε η* f *είναι συνεχής στο* x_o *αν και μόνον αν το* $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ *υπάρχει και ισούται με* $f(x_o)$.

Απόδειξη Αν η f είναι συνεχής στο x_o τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $|x - x_o| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$. Επομένως, αν

$x \in X$ και $0 < |x - x_o| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$, άρα το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ υπάρχει και ισούται με $f(x_o)$.

Αν αντίστροφα το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ υπάρχει και ισούται με $f(x_o)$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $0 < |x - x_o| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$. Επομένως αν $x \in X$ και $|x - x_o| < \delta$ θα ισχύει $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$ (γιατί αν $|x - x_o| = 0$ τότε $x = x_o$ άρα $|f(x) - f(x_o)| = 0 < \varepsilon$). Άρα η f θα είναι συνεχής στο x_o. $\square$

Σημείωση Τονίζουμε και πάλι ότι η Πρόταση έχει εφαρμογή μόνον όταν το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Σε κάθε μεμονωμένο σημείο s_o του πεδίου ορισμού της η συνάρτηση είναι συνεχής (Πρόταση 7.3), αλλά το όριο $\lim\limits_{x \to s_o} f(x)$ *δεν έχει έννοια*.

Παρατήρηση 7.8 Αν εφαρμόσουμε την Πρόταση 7.7 στο Παράδειγμα 7.5 (vi) προκύπτει ότι σε κάθε άρρητο $x_o \in [0,1]$ η συνάρτηση f είναι συνεχής (αφού το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ υπάρχει και ισούται με $0 = f(x_o)$) ενώ είναι ασυνεχής σε κάθε ρητό $\frac{m}{n} \in (0,1]$ (αφού το $\lim\limits_{x \to m/n} f(x)$ υπάρχει μεν, αλλά δεν ισούται με $f(\frac{m}{n})$).

Η επόμενη Παρατήρηση βεβαιώνει ότι το όριο $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ υπάρχει αν και μόνον αν η f μπορεί να ορισθεί στο x_o έτσι ώστε να είναι **συνεχής στο** x_o. Η Παρατήρηση αυτή μπορεί να χρησιμεύσει ως ισοδύναμος ορισμός του ορίου $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$.

Παρατήρηση 7.9 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και έστω $x_o \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του X. Τότε το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ υπάρχει και ισούται με έναν αριθμό $y_o \in \mathbb{R}$ αν και μόνον αν η συνάρτηση*

$$\tilde{f} : X \cup \{x_o\} \to \mathbb{R} \quad \textit{με } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{αν } x \in X \setminus \{x_o\} \\ y_o, & \textit{αν } x = x_o \end{cases}$$

είναι συνεχής στο x_o.

Απόδειξη Ορίζουμε τη συνάρτηση $\tilde{f}$ όπως στην εκφώνηση. Σύμφωνα με την Πρόταση 7.7, η $\tilde{f}$ είναι συνεχής στο x_o αν και μόνον αν το όριο $\lim\limits_{x \to x_o} \tilde{f}(x)$ υπάρχει και ισούται με $\tilde{f}(x_o) = y_o$. Εφόσον όμως, αν $x \in X \setminus \{x_o\}$, έχουμε $|\tilde{f}(x) - y_o| < \epsilon$ αν και μόνον αν $|f(x) - y_o| < \epsilon$, από τον Ορισμό 7.3 βλέπουμε ότι το $\lim\limits_{x \to x_o} \tilde{f}(x)$ υπάρχει και ισούται με y_o αν και μόνον αν το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ υπάρχει και ισούται με y_o. $\square$

Πρόταση 7.10 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, έστω $x_o \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του X, έστω $f, g : X \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις και $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν τα όρια $\lim_{x \to x_o} f(x) = y_o$ και $\lim_{x \to x_o} g(x) = z_o$ υπάρχουν, τότε*

1. *Το όριο $\lim_{x \to x_o} (f(x) + g(x))$ υπάρχει και ισούται με $y_o + z_o$.*
2. *Το όριο $\lim_{x \to x_o} (\lambda f(x))$ υπάρχει και ισούται με λy_o.*
3. *Το όριο $\lim_{x \to x_o} (f(x).g(x))$ υπάρχει και ισούται με $y_o z_o$.*
4. *Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$ και $y_o \neq 0$, το όριο $\lim_{x \to x_o} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ υπάρχει και ισούται με $\frac{z_o}{y_o}$.*

Η **απόδειξη** είναι άμεση συνέπεια των αντίστοιχων αλγεβρικών ιδιοτήτων των ακολουθιών, αν χρησιμοποιήσουμε την «αρχή της μεταφοράς».

Παρατηρήσεις 7.11 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_o \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του X και $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x \to x_o} f(x) = y_o$. Τότε*
(α) *Η f είναι* τοπικά φραγμένη στο *x_o, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ και $M > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $|x - x_o| < \delta$ να ισχύει $|f(x)| \leq M$.*
(β) *Αν $y_o \neq 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$ με $0 < |x - x_o| < \delta$. Επομένως η συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$ ορίζεται στο $(X \setminus \{x_o\}) \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$.*
(γ) *Έπεται ότι στο (4) της προηγούμενης πρότασης, αν $y_o \neq 0$ τότε το όριο $\lim_{x \to x_o} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ υπάρχει και ισούται με $\frac{z_o}{y_o}$.*

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $0 < |x - x_o| < \delta(\varepsilon)$ να ισχύει $|f(x) - y_o| < \varepsilon$, άρα

$$|y_o| - \varepsilon < |f(x)| < |y_o| + \varepsilon.$$

(α) Μπορούμε να πάρουμε π.χ. $M = \max\{|y_o| + \varepsilon, |f(x_o)|\}$.
(β) Αν $y_o \neq 0$, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα με $\varepsilon = \frac{|y_o|}{2}$ έχουμε, για κάθε $x \in X$ με $0 < |x - x_o| < \delta(\frac{|y_o|}{2})$, την ανισότητα $|f(x)| > |y_o| - \varepsilon = \frac{|y_o|}{2} > 0$, άρα $f(x) \neq 0$.
(γ) Αν $y_o \neq 0$, από το (β) υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η $\frac{1}{f}$ να ορίζεται στο σύνολο $X' = X \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$. Εφαρμόζουμε το (4) της Πρότασης στο σύνολο X'.
$\square$

Πρόταση 7.12 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, έστω $x_o \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του X και $f : X \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το όριο $\lim_{x\to x_o} f(x)$ υπάρχει και ισούται με y_o. Έστω g μια συνάρτηση ορισμένη στο $f(X)$ και στο y_o (δηλαδή $g : Y \to \mathbb{R}$ όπου $f(X) \subseteq Y$ και $y_o \in Y$). Αν η g είναι* συνεχής *στο y_o τότε το όριο $\lim_{x\to x_o}(g \circ f)(x)$ υπάρχει και ισούται με $g(y_o)$.*

Απόδειξη Και αυτή η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την αρχή της μεταφοράς: Αν (x_n) είναι τυχαία ακολουθία με $x_n \in X$ και $x_n \neq x_o$ για κάθε n, ώστε $x_n \to x_o$, ισχυρίζομαι ότι η ακολουθία $((g \circ f)(x_n))$ συγκλίνει στο $g(y_o)$. Πράγματι, αφού $\lim_{x\to x_o} f(x) = y_o$, από την αρχή της μεταφοράς έχουμε $\lim_n f(x_n) = y_o$, άρα, από την συνέχεια της g στο y_o, έχουμε $\lim_n g(f(x_n)) = g(y_o)$.

Επομένως, αφού η (x_n) είναι τυχαία, από την αρχή της μεταφοράς προκύπτει ότι το όριο $\lim_{x\to x_o} g(f(x))$ υπάρχει και ισούται με $g(y_o)$.

Παράδειγμα 7.13 *Αν το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ υπάρχει και ισούται με y_o τότε το $\lim\limits_{x\to x_o} |f|(x)$ υπάρχει και ισούται με $|y_o|$.*

Όρια στο άπειρο

Ορισμός 7.4 *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

*Αν το X δεν είναι άνω φραγμένο, λέμε ότι **το όριο της f καθώς το x τείνει στο $+\infty$ υπάρχει και ισούται με** $y_o \in \mathbb{R}$ αν:*

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε

αν $x \in X$ και $x > M$ τότε $|f(x) - y_o| < \varepsilon$.

Γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_o$.

*Αν το X δεν είναι κάτω φραγμένο, λέμε ότι **το όριο της f καθώς το x τείνει στο $-\infty$ υπάρχει και ισούται με** $y_o \in \mathbb{R}$ αν:*

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε

αν $x \in X$ και $x < M$ τότε $|f(x) - y_o| < \varepsilon$.

Γράφουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_o$.

(Οι σχέσεις $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ ορίζονται ανάλογα με τους ορισμούς 7.3 (ii) και (iii) αντίστοιχα.)

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξει κανείς ότι, αν το X δεν είναι άνω φραγμένο, το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει και ισούται με y_o αν και μόνον αν **για κάθε** ακολουθία (x_n) στοιχείων του X με $x_n \to +\infty$ ισχύει $f(x_n) \to y_o$ (και αντίστοιχα για το $-\infty$).

Πλευρικά όρια

Ορισμός 7.5 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ και $x_o \in \mathbb{R}$. Το x_o λέγεται* ***σημείο συσσώρευσης του X από τα αριστερά*** *αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in (x_o - \delta, x_o) \cap X$ (ισοδύναμα, $x \in X$ με $x_o - \delta < x < x_o$), αν δηλαδή $(x_o - \delta, x_o) \cap X \neq \emptyset$.*

Το σημείο x_o λέγεται ***σημείο συσσώρευσης του X από τα δεξιά*** *αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in (x_o, x_o + \delta) \cap X$ (ισοδύναμα, $x \in X$ με $x_o < x < x_o + \delta$), αν δηλαδή $(x_o, x_o + \delta) \cap X \neq \emptyset$.*

Παρατήρηση 7.14 *Αν ένα σημείο x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X από τα αριστερά ή από τα δεξιά, τότε είναι σημείο συσσώρευσης του X. Αντίστροφα, αν ένα σημείο x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X, τότε είναι ή σημείο συσσώρευσης από τα αριστερά, ή από τα δεξιά, ή και τα δύο.*

Ορισμός 7.6 (Πλευρικά όρια) *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και έστω $x_o \in \mathbb{R}$.*

Αν το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X από τα αριστερά, λέμε ότι ***το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_o από τα αριστερά υπάρχει και ισούται με*** *$y_o \in \mathbb{R}$ αν:*

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε
αν $x \in X$ και $x_o - \delta < x < x_o$ τότε $|f(x) - y_o| < \varepsilon$.
Γράφουμε $\lim\limits_{x \uparrow x_o} f(x) = y_o$ ή $\lim\limits_{x \to x_o-} f(x) = y_o$.

Αν το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X από τα δεξιά, λέμε ότι ***το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_o από τα δεξιά υπάρχει και ισούται με*** *$z_o \in \mathbb{R}$ αν:*

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε
αν $x \in X$ και $x_o < x < x_o + \delta$ τότε $|f(x) - z_o| < \varepsilon$.
Γράφουμε $\lim\limits_{x \downarrow x_o} f(x) = z_o$ ή $\lim\limits_{x \to x_o+} f(x) = z_o$.

(Πλευρικά όρια ίσα με $+\infty$ ή $-\infty$ ορίζονται ανάλογα με τους ορισμούς 7.3 (ii) και (iii) αντίστοιχα .)
Σημειώνουμε ότι είναι δυνατόν το $\lim\limits_{x \to x_o+} f(x)$ να υπάρχει και το $\lim\limits_{x \to x_o-} f(x)$ να μην υπάρχει, ή μπορεί και τα δύο *πλευρικά όρια* να υπάρχουν και να είναι άνισα.

Παρατήρηση 7.15 *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και έστω $x_o \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $g = f|_{X \cap (-\infty, x_o]}$ και $h = f|_{X \cap [x_o, +\infty)}$.*

Παρατηρούμε ότι το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X από τα αριστερά αν και μόνον αν είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $X \cap (-\infty, x_o]$.

Αν το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X από τα αριστερά, τότε το πλευρικό όριο $\lim\limits_{x \to x_o -} f(x)$ υπάρχει και ισούται με y_o αν και μόνον αν το όριο $\lim\limits_{x \to x_o} g(x)$ υπάρχει και ισούται με y_o.

Αντίστοιχα, αν το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X από τα δεξιά, τότε το πλευρικό όριο $\lim\limits_{x \to x_o +} f(x)$ υπάρχει και ισούται με z_o αν και μόνον αν το όριο $\lim\limits_{x \to x_o} h(x)$ υπάρχει και ισούται με z_o.

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του X από τα αριστερά και θέτουμε $X_o = X \cap (-\infty, x_o]$. Αν το $\lim\limits_{x \to x_o -} f(x)$ υπάρχει και ισούται με y_o, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $0 < x_o - x < \delta$ να ισχύει $|f(x) - y_o| < \epsilon$. Επομένως, για κάθε $x \in X_o$ με $0 < |x - x_o| < \delta$ έχουμε $0 < x_o - x < \delta$, επομένως $|g(x) - y_o| = |f(x) - y_o| < \epsilon$. Δηλαδή το όριο $\lim\limits_{x \to x_o} g(x)$ υπάρχει και ισούται με y_o.
Αν αντίστροφα το όριο $\lim\limits_{x \to x_o} g(x)$ υπάρχει και είναι y_o, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X_o$ με $0 < |x - x_o| < \delta$ ισχύει $|g(x) - y_o| < \epsilon$. Επομένως, για κάθε $x \in X$ με $0 < x_o - x < \delta$ έχουμε $x \in X_o$, επομένως $|f(x) - y_o| = |g(x) - y_o| < \epsilon$. Δηλαδή το όριο $\lim\limits_{x \to x_o -} f(x)$ υπάρχει και είναι y_o.

Ο ισχυρισμός για το όριο από δεξιά αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

Πρόταση 7.16 *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και έστω ότι το $x_o \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του X και από τα αριστερά και από τα δεξιά. Τότε το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ υπάρχει αν και μόνον αν και τα δύο πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα.*

Ας τονίσουμε ότι, όταν το $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ *δεν υπάρχει*, δεν έπεται απαραιτήτως ότι τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά: μπορεί ένα από τα πλευρικά όρια, ή και τα δύο, να μην υπάρχουν. Ένα παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ με $\quad f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x < 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

Πόρισμα 7.17 *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και έστω ότι το $x_o \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του X και από τα αριστερά και από τα δεξιά. Τότε η f είναι συνεχής στο x_o αν και μόνον αν και τα δύο πλευρικά όρια $\lim\limits_{x \to x_o +} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_o -} f(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους και με το $f(x_o)$.*

Επομένως αν τα δύο πλευρικά όρια στο x_o υπάρχουν και είναι άνισα, ή αν κάποιο από αυτά δεν υπάρχει, τότε η f είναι ασυνεχής στο x_o.

Παρατήρηση 7.18 *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_o \in \mathbb{R}$. Αν τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to x_o-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_o+} f(x)$ υπάρχουν και είναι διαφορετικά μεταξύ τους, λέμε ότι η f παρουσιάζει* άλμα ασυνέχειας *στο x_o.*
Υποθέτουμε ότι η f είναι μονότονη. *Τότε τα πλευρικά όρια υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ για κάθε $x_o \in \mathbb{R}$, και επομένως οι ασυνέχειες της f, αν υπάρχουν, θα είναι άλματα.*

Απόδειξη Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα (αλλιώς θεωρούμε την $-f$). Το σύνολο

$$Y_o = \{f(t) \in \mathbb{R} : t < x_o\} = f((-\infty, x_o))$$

είναι μη κενό και άνω φραγμένο από το $f(x_o)$ και συνεπώς έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω y_o, και ισχύει $y_o \leq f(x_o)$. Θα δείξω ότι το $\lim\limits_{x\to x_o-} f(x)$ υπάρχει και ισούται με y_o.

Πράγματι, αν δοθεί $\epsilon > 0$, επειδή ο αριθμός $y_o - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου X_o, υπάρχει ένα $f(t_o) \in X_o$ με $f(t_o) > y_o - \epsilon$. Επομένως για κάθε $x \in (t_o, x_o)$ έχουμε, εφόσον η f είναι αύξουσα,

$$y_o - \epsilon < f(t_o) \leq f(x) \leq y_o < y_o + \epsilon$$

άρα, αν θέσουμε $\delta = x_o - t_o > 0$, τότε για κάθε x με $0 < x_o - x < \delta$ έχουμε ($t_o < x < x_o$ άρα)

$$|f(x) - y_o| < \epsilon.$$

Με τον ίδιο τρόπο, θεωρώντας το σύνολο $f((x_o, +\infty))$ (που είναι κάτω φραγμένο από το $f(x_o)$) αποδεικνύεται ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o+} f(x)$ και

$$\lim_{x\to x_o+} f(x) = \inf f((x_o, +\infty)) \geq f(x_o).$$

Επομένως τα πλευρικά όρια πάντα υπάρχουν και

$$\lim_{x\to x_o-} f(x) = \sup f((-\infty, x_o,)) \qquad \lim_{x\to x_o+} f(x) = \inf f((x_o, +\infty))$$

$$\text{και} \qquad \lim_{x\to x_o-} f(x) \leq f(x_o) \leq \lim_{x\to x_o+} f(x).$$

Άρα, αν τα πλευρικά όρια διαφέρουν, έχουμε άλμα ασυνέχειας, ενώ αν είναι ίσα, τότε συμπίπτουν με την τιμή $f(x_o)$ οπότε η f είναι συνεχής στο x_o.