5 Συνεχείς Συναρτήσεις

Έστω X, Y υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Η f είναι συνεχής σ'ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της αν η τιμή $f(x_o)$ μπορεί να προσεγγισθεί με **αυθαίρετη** ακρίβεια αν πάρει κανείς τιμές $f(x)$ σε σημεία x **αρκετά γειτονικά** στο x_o. Ο ακριβής ορισμός είναι ο εξής:

Ορισμός 5.1 *Έστω X, Y υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Η f λέγεται* ***συνεχής σ'ένα σημείο*** *$x_o \in X$ αν για κάθε (αυθαίρετο) $\varepsilon > 0$ υπάρχει (κατάλληλο) $\delta > 0$ ώστε:*

αν $x \in X$ και $|x - x_o| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

Η f λέγεται ***συνεχής στο*** *X αν είναι συνεχής σε κάθε $x_o \in X$.*

Παρατηρήσεις 5.1 (α) Η συνέχεια της f στο x_o μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Αν δοθεί οποιαδήποτε ζώνη

$$Z_\varepsilon = (f(x_o) - \varepsilon, f(x_o) + \varepsilon)$$

γύρω από την τιμή $f(x_o)$ μπορούμε να βρούμε μια γειτονιά

$$\Gamma_\delta = (x_o - \delta, x_o + \delta) \cap X$$

του x_o που να απεικονίζεται ολόκληρη μέσα στη ζώνη Z_ε, δηλαδή τέτοια ώστε $f(\Gamma_\delta) \subseteq Z_\varepsilon$.

(β) Η συνέχεια έχει έννοια μόνον σε σημεία x_o του πεδίου ορισμού της f (βλ. π.χ. το Παράδειγμα 5.5).

(γ) Ο αριθμός δ εξαρτάται εν γένει και από το ε και από το x_o.

(δ) Αν υπάρχει ένα $\delta > 0$ που ικανοποιεί τον ορισμό τότε κάθε δ' με $0 < \delta' < \delta$ επίσης τον ικανοποιεί.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό μπορείς να αποδείξεις ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς:

Παράδειγμα 5.2 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3$ για κάθε x.*

Είναι συνεχής σε κάθε $x_o \in \mathbb{R}$. (Εδώ το δ δεν εξαρτάται ούτε από το ε ούτε από το x_o.)

Παράδειγμα 5.3 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ για κάθε x.*

Είναι συνεχής σε κάθε $x_o \in \mathbb{R}$. (Εδώ το δ εξαρτάται από το ε αλλά όχι από το x_o: κάθε δ με $0 < \delta \leq \varepsilon$ ικανοποιεί τον ορισμό.)

Παράδειγμα 5.4 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 5x^2 + 6$ για κάθε x.*

Είναι συνεχής σε κάθε $x_o \in \mathbb{R}$.
Απόδειξη Αν δοθεί $\varepsilon > 0$, θέλουμε να προσδιορίσουμε ένα κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε να ικανοποιείται ο ορισμός. Έστω $\delta > 0$. Αν $|x - x_o| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(x_o)| = 5|x^2 - x_o^2| = 5|x - x_o|.|x + x_o| < 5|x + x_o|\delta.$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $5|x + x_o|\delta < \varepsilon$ για όλα τα x στη γειτονιά $\Gamma_\delta = (x_o - \delta, x_o + \delta)$ του x_o. Δεν βλάπτει τη γενικότητα να περιορίσουμε κατ'αρχήν το x σε μια γειτονιά πλάτους π.χ. 1 (για να διευκολύνουμε τις πράξεις) και αργότερα μπορούμε να το περιορίσουμε ακόμα περισσότερο (ανάλογα με το ε). Αυτό σημαίνει ότι αναζητούμε δ μεταξύ 0 και 1. Παρατηρούμε ότι αν $|x - x_o| < 1$ τότε $|x| < |x_o| + 1$ οπότε $|x + x_o| \leq |x| + |x_o| \leq 2|x_o| + 1$. Αν λοιπόν διαλέξουμε ένα $\delta \in (0, 1]$ που να ικανοποιεί $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{5(2|x_o| + 1)}$ τότε για κάθε x με $|x - x_0| < \delta$ θα έχουμε $5|x + x_o|\delta < 5(2|x_o| + 1)\delta \leq \varepsilon$, άρα

$$|f(x) - f(x_o)| = 5|x - x_o|.|x + x_o| \leq 5(2|x_o| + 1)\delta < \varepsilon.$$

Δηλαδή στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο ορισμός της συνέχειας ικανοποιείται για κάθε δ με $0 < \delta \leq \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{5(2|x_o| + 1)}\}$. Εδώ το δ που βρήκαμε[1] εξαρτάται και από το ε και από το x_o.

Παράδειγμα 5.5 *$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.*

Είναι συνεχής σε κάθε x_o του πεδίου ορισμού της.
Απόδειξη Παρατηρούμε πρώτα ότι, εφόσον $x_o \neq 0$, αν επιλέξουμε το x ώστε $|x - x_o| < \frac{|x_o|}{2}$, τότε $|x| > \frac{|x_o|}{2}$ (τριγωνική ανισότητα), οπότε (βεβαίως $x \neq 0$ και)

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_o}\right| = \frac{|x - x_o|}{|x|.|x_o|} < 2\frac{|x - x_o|}{x_o^2}\,.$$

[1] Μπορεί να αποδειχθεί (όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο) ότι *δεν υπάρχει στο παράδειγμα αυτό* $\delta > 0$ που να μην εξαρτάται και από το x_o.

Επομένως αν δοθεί $\epsilon > 0$, επιλέγοντας δ με $0 < \delta \le \min\{\frac{|x_o|}{2}, \frac{x_o^2}{2}\varepsilon\}$ θα έχουμε, για κάθε x με $|x - x_o| < \delta$ (οπότε το x θα ανήκει αυτομάτως στο πεδίο ορισμού της f) ότι

$$|f(x) - f(x_o)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_o}\right| < 2\frac{|x - x_o|}{x_o^2} < 2\frac{\delta}{x_o^2} \le \varepsilon \,. \quad \square$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε τη συνάρτηση αυτή σ'όλο το $\mathbb{R}$ ώστε να είναι παντού συνεχής; Όχι:

Παράδειγμα 5.6 $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$.

Η f_c δεν είναι συνεχής στο 0, όποια κι αν είναι η τιμή του c.

Παράδειγμα 5.7 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Η g δεν είναι συνεχής στο 0.

(Τα δύο αυτά παραδείγματα αποδεικνύονται ευκολότερα χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.9.)

Παράδειγμα 5.8 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $h(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Η h είναι συνεχής στο 0.

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τότε $\delta > 0$ (μάλιστα, μπορούμε να πάρουμε $\delta = \varepsilon$) ώστε για κάθε x με $|x - 0| < \delta$ να ισχύει

$$|h(x) - h(0)| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| < \varepsilon$$

(εφόσον $|\sin\theta| \le 1$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$).

Πρόταση 5.9 *Μία συνάρτηση* $f : X \to Y$ *είναι συνεχής σ'ένα σημείο* $x_o \in X$ *αν και μόνον αν* ***για κάθε*** *ακολουθία* (x_n) *που συγκλίνει στο* x_o*, με* $x_n \in X$ *για κάθε* n*, η ακολουθία* $(f(x_n))$ *συγκλίνει στο* $f(x_o)$*.*

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o. Έστω (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to x_o$. Θα δείξω ότι $f(x_n) \to f(x_o)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλω να δείξω ότι υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $|f(x_n) - f(x_o)| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_o$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_o, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε[2] $f(\Gamma_\delta) \subseteq Z_\varepsilon$. Αλλά $x_n \to x_o$, άρα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n - x_o| < \delta$ για κάθε $n \geq n_o$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $n \geq n_o$ έχουμε $x_n \in \Gamma_\delta$ (εφ'όσον $x_n \in X$ εξ υποθέσεως) και άρα $f(x_n) \in Z_\varepsilon$, δηλαδή $|f(x_n) - f(x_o)| < \varepsilon$.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_o. Υπάρχει τότε κάποιο $\varepsilon > 0$ ώστε (για κάθε $\delta > 0$, άρα και) για κάθε δ_n της μορφής $\delta_n = \frac{1}{n}$ να μην ισχύει ότι $f(\Gamma_{\delta_n}) \subseteq Z_\varepsilon$, οπότε μπορούμε να βρούμε $x_n \in \Gamma_{\delta_n}$ με $f(x_n) \notin Z_\varepsilon$. Δηλαδή έχουμε $x_n \in X$ και $|x_n - x_o| < \frac{1}{n}$ για κάθε n, οπότε η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x_o, αλλά $|f(x_n) - f(x_o)| \geq \varepsilon$, οπότε η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο $f(x_o)$. $\square$

Τονίζουμε ότι για να δείξουμε ότι η f *είναι συνεχής* στο x_o πρέπει να δείξουμε ότι $f(x_n) \to f(x_o)$ για *οποιαδήποτε* ακολουθία (x_n) απο το X που συγκλίνει στο x_o. Για να δείξουμε ότι η f *δεν είναι συνεχής* στο x_o *αρκεί* να βρούμε *μια* ακολουθία (x_n) απο το X που να συγκλίνει στο x_o, αλλά η $(f(x_n))$ να μην συγκλίνει στο $f(x_o)$ (να συγκλίνει αλλού, ή πουθενά).

Αποδείξεις των παραδειγμάτων 5.6 και 5.7 Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n) = \left(\dfrac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}}\right)$. Οι όροι της βρίσκονται όλοι στο πεδίο ορισμού των συναρτήσεων, και η ακολουθία τείνει στο 0, αλλά η ακολουθία $(f_c(x_n)) = (\pi n + \dfrac{\pi}{2})$ δεν συγκλίνει στο c και η ακολουθία $(g(x_n)) = ((-1)^n)$ δεν συγκλίνει στο 0.

Πρόταση 5.10 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ και $x_o \in X$. Αν οι συναρτήσεις $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο x_o, τότε*

1. *Η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο x_o.*
2. *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση λf είναι συνεχής στο x_o.*
3. *Η συνάρτηση $f.g$ είναι συνεχής στο x_o.*
4. *Αν επί πλέον $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$, τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι (καλά ορισμένη στο X και) συνεχής στο x_o.*

[2] Χρησιμοποιώ τους συμβολισμούς της Παρατήρησης 5.1.

Η **απόδειξη** είναι άμεση συνέπεια των αντιστοίχων ιδιοτήτων των ορίων ακολουθιών.

Για παράδειγμα, για να δείξω ότι η $\dfrac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_o, αρκεί να δείξω ότι, για **κάθε** ακολουθία (x_n) που συγκλίνει στο x_o, με $x_n \in X$ για κάθε n, η ακολουθία $\left(\dfrac{f}{g}(x_n)\right)$ συγκλίνει στο $\dfrac{f}{g}(x_o)$. Αλλά αφού οι f και g είναι συνεχείς στο x_o, έχουμε $f(x_n) \to f(x_o)$ και $g(x_n) \to g(x_o)$ από την Πρόταση 5.9. Επιπλέον ισχύει ότι $g(x_n) \neq 0$ για κάθε n. Κατά συνέπεια το πηλίκο $\left(\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)$ των ακολουθιών (ορίζεται και) συγκλίνει στο πηλίκο $\dfrac{f(x_o)}{g(x_o)}$ των ορίων τους.

Παράδειγμα 5.11 *Η συνάρτηση Dirichlet* $\qquad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

είναι ασυνεχής σε κάθε $x_o \in \mathbb{R}$.

Πράγματι, ξέρουμε ότι (όποιο και να είναι το x_o) υπάρχει ακολουθία (x_n) με $x_n \in \mathbb{Q}$ για κάθε n ώστε $x_n \to x_o$, και υπάρχει ακολουθία (y_n) με $y_n \notin \mathbb{Q}$ για κάθε n ώστε $y_n \to x_o$. Έχουμε $f(x_n) = 1$ για κάθε n, άρα $f(x_n) \to 1$, ενώ $f(y_n) = 0$ για κάθε n οπότε $f(y_n) \to 0$. Επομένως η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο x_o, γιατί αν ήταν θα έπρεπε να ισχύουν οι ισότητες $\lim_n f(x_n) = f(x_o) = \lim_n f(y_n)$, ενώ ισχύει $\lim_n f(x_n) \neq \lim_n f(y_n)$.

Πρόταση 5.12 *Ο περιορισμός μιάς συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής: Έστω* $x_o \in Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ *και* $f : X \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση. Αν η* f *είναι συνεχής στο* x_o, *τότε ο περιορισμός της στο* Y, *έστω* $g = f|_Y$, *είναι συνεχής.*

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα: Μια ασυνεχής συνάρτηση είναι δυνατόν να έχει συνεχή περιορισμό.

Απόδειξη Αν δοθεί $\varepsilon > 0$ πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε

$$x \in Y \cap (x_o - \delta, x_o + \delta) \Rightarrow |g(x) - g(x_o)| < \varepsilon.$$

Αλλά η f είναι συνεχής στο x_o, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$x \in X \cap (x_o - \delta, x_o + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon.$$

Αν όμως $x \in Y \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$ τότε $x \in X \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$ και άρα $|g(x) - g(x_o)| = |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

Ένα παράδειγμα ασυνεχούς συνάρτησης με συνεχή περιορισμό είναι η συνάρτηση Dirichlet, έστω f. Έστω $x_o \in \mathbb{Q}$. Ο περιορισμός $f|_{\mathbb{Q}}$ είναι η σταθερή συνάρτηση 1, άρα η $f|_{\mathbb{Q}}$ είναι συνεχής. Όμως η f είναι ασυνεχής στο x_o. $\square$

Είναι φανερό από τον ορισμό της συνέχειας ότι η συμπεριφορά μιάς συνάρτησης f «μακριά» από το x_o δεν επηρεάζει την συνέχειά της στο x_o: αυτό που ενδιαφέρει είναι η συμπεριφορά της «τοπικά», σε μια (οσοδήποτε μικρή) γειτονιά του x_o. Πράγματι:

Πρόταση 5.13 (Τοπική ιδιότητα) *Έστω $x_o \in X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν υπάρχει $\theta > 0$ ώστε ο περιορισμός της f στο $X \cap (x_o - \theta, x_o + \theta)$ να είναι συνεχής στο x_o, τότε η ίδια η f είναι συνεχής στο x_o.*

Απόδειξη Αν $\Omega = X \cap (x_o - \theta, x_o + \theta)$ και $g = f|_\Omega$ τότε, από την υπόθεση, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε για κάθε $x \in \Omega \cap (x_o - \delta_1, x_o + \delta_1)$ να ισχύει $|g(x) - g(x_o)| < \varepsilon$.

Έστω $\delta = \min\{\theta, \delta_1\}$. Αν $x \in X \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$ τότε $x \in (x_o - \theta, x_o + \theta)$ και άρα $x \in \Omega$. Επίσης $x \in (x_o - \delta_1, x_o + \delta_1)$ άρα $|g(x) - g(x_o)| < \varepsilon$. Αλλά αφού η g είναι ο περιορισμός της f στο Ω έχουμε $|f(x) - f(x_o)| = |g(x) - g(x_o)| < \varepsilon$.

Δεύτερη απόδειξη Από την Πρόταση 5.9, αν (x_n) είναι τυχαία ακολουθία στοιχείων του X που συγκλίνει στο x_o, πρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_o)$. Αφού $x_n \to x_o$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in (x_o - \theta, x_o + \theta)$ για κάθε $n \geq n_o$. Επομένως για κάθε $n \geq n_o$ το x_n ανήκει στο πεδίο ορισμού Ω της g, η οποία είναι συνεχής στο x_o. Έπεται από την Πρόταση 5.9 ότι η ακολουθία $(g(x_n))_{n \geq n_o}$ συγκλίνει στο $g(x_o)$. Αλλά $g(x_n) = f(x_n)$ όταν $n \geq n_o$ και $g(x_o) = f(x_o)$. Επομένως και η $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_o)$ (αφού η $(f(x_n))_{n \geq n_o}$ συγκλίνει στο $f(x_o)$). $\square$

Πόρισμα 5.14 ***(1)*** *Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση p είναι συνεχής σε κάθε $x_o \in \mathbb{R}$.*

(2) *Κάθε ρητή συνάρτηση $f = \frac{p}{q}$ (όπου p, q είναι πολυώνυμα) είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $X = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.*

Μια συνεχής συνάρτηση f δεν είναι κατ'ανάγκην φραγμένη σ'όλο το πεδίο ορισμού της. Θεώρησε για παράδειγμα τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$ ή $g(x) = \frac{1}{x}$. Μπορούμε όμως, γύρω από κάθε σημείο του πεδίου ορισμού, να βρούμε μια (ενδεχομένως μικρή) περιοχή στην οποία ο περιορισμός της f είναι φραγμένη συνάρτηση:

Πρόταση 5.15 *Έστω $x_o \in X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο x_o, τότε υπάρχει $\delta > 0$ και $M > 0$ ώστε για κάθε $x \in X \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$ να ισχύει $|f(x)| \leq M$).*

Απόδειξη Αν δοθεί $\varepsilon > 0$, από τον ορισμό της συνέχειας στο x_o υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$ να ισχύει $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$ οπότε $|f(x)| < |f(x_o)| + \varepsilon$. Δηλαδή ο αριθμός $M = |f(x_o)| + \varepsilon$ ικανοποιεί $f(\Gamma_\delta) \subseteq [-M, M]$. $\square$

Όταν ισχύει το συμπέρασμα της Πρότασης, όταν δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το σύνολο $f(\Gamma_\delta)$ να είναι φραγμένο, λέμε ότι η f είναι *τοπικά φραγμένη σε μια περιοχή του* x_o.

Πρόταση 5.16 *Έστω $x_o \in X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_o.*

- *Αν $f(x_o) > 0$ υπάρχει περιοχή $\Gamma_\delta = X \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$ του x_o ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Gamma_\delta$.*
- *Αν $f(x_o) < 0$ υπάρχει περιοχή Γ_δ του x_o ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Gamma_\delta$.*

Απόδειξη Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{3}|f(x_o)|$: είναι θετικός αριθμός. Από την συνέχεια της f στο x_o υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in \Gamma_\delta$ να ισχύει

$$-\frac{1}{3}|f(x_o)| < f(x) - f(x_o) < \frac{1}{3}|f(x_o)|.$$

Αν $f(x_o) > 0$ η ανισότητα $f(x) - f(x_o) > -\frac{1}{3}f(x_o)$ δίνει $f(x) > \frac{2}{3}f(x_o) > 0$ για κάθε $x \in \Gamma_\delta$ ενώ αν $f(x_o) < 0$ η ανισότητα $f(x) - f(x_o) < \frac{1}{3}|f(x_o)| = -\frac{1}{3}f(x_o)$ δίνει $f(x) < \frac{2}{3}f(x_o) < 0$ για κάθε $x \in \Gamma_\delta$. $\square$

Παρατήρηση 5.17 Η επιλογή του $\varepsilon = \frac{1}{3}|f(x_o)|$ είναι αυθαίρετη: οποιαδήποτε θετική τιμή, γνήσια μικρότερη από $|f(x_o)|$, θα αρκούσε για την απόδειξη.

Με την επιλογή αυτή δείξαμε ότι αν $f(x_o) > 0$ υπάρχει περιοχή Γ_δ του x_o ώστε για κάθε $x \in \Gamma_\delta$ να ισχύει (όχι απλώς $f(x) > 0$ αλλά) $f(x) > \frac{2}{3}f(x_o)$.

Επιλέγοντας π.χ. $\varepsilon = \frac{1}{10}|f(x_o)|$ μπορούμε να βρούμε περιοχή $\Gamma_{\delta'}$ ώστε αν $f(x_o) > 0$ να ισχύει $f(x) > \frac{9}{10}f(x_o)$ για κάθε $x \in \Gamma_{\delta'}$.

Πρόταση 5.18 *Έστω $x_o \in X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής (στο x_o) τότε η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής (στο x_o).*

Απόδειξη Θέτουμε $g = |f|$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$ να ισχύει $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$. Αλλά

$$|g(x) - g(x_o)| = \big|\,|f(x)| - |f(x_o)|\,\big| \overset{(*)}{\leq} |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

(η (*) είναι συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας) πράγμα που δείχνει ότι η g είναι συνεχής στο x_o. $\square$

Πρόταση 5.19 (Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων) *Έστω $x_o \in X \subseteq \mathbb{R}$, έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και έστω $g : Y \to \mathbb{R}$ μια άλλη συνάρτηση με $f(X) \subseteq Y$. Αν η f είναι συνεχής (στο x_o) και η g είναι συνεχής (στο $f(x_o)$), τότε η $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής (στο x_o).*

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $|x - x_o| < \delta$ να ισχύει $|g(f(x)) - g(f(x_o))| < \varepsilon$.

Η g είναι συνεχής στο $y_o = f(x_o)$, άρα υπάρχει $\theta > 0$ ώστε αν $y \in Y$ και $|y - y_o| < \theta$ να ισχύει $|g(y) - g(y_o)| < \varepsilon$. (1)

Η f είναι συνεχής στο x_o άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $|x - x_o| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_o)| < \theta$.

Αλλά τα $y = f(x)$ και $y_o = f(x_o)$ ανήκουν στο $f(X) \subseteq Y$ και $|y - y_o| = |f(x) - f(x_o)| < \theta$, άρα από την (1) έχουμε $|g(f(x)) - g(f(x_o))| < \varepsilon$.

Δεύτερη απόδειξη: Έστω (x_n) τυχαία ακολουθία με $x_n \in X$ ώστε $x_n \to x_o$. Θέτουμε $y_n = f(x_n)$. Η συνέχεια της f στο x_o δείχνει ότι η ακολουθία (y_n) συγκλίνει στο $y_o = f(x_o)$. Αλλά από τη συνέχεια της g στο y_o έχουμε τώρα $g(y_n) \to g(y_o)$.

Επομένως για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in X$ ώστε $x_n \to x_o$ δείξαμε ότι $(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_o))$. $\square$