3 Ακολουθίες

Ορισμός 3.1 ***Ακολουθία (πραγματικών αριθμών)*** *είναι μια αντιστοίχιση* $1 \rightsquigarrow a_1, 2 \rightsquigarrow a_2, \ldots, n \rightsquigarrow a_n, \ldots$ *των φυσικών αριθμών* $1, 2, \ldots, n, \ldots$ *προς τους πραγματικούς αριθμούς. Γράφουμε* (a_n) *ή* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ή* $(a_1, a_2, \ldots)$*, ή ενδεχομένως* $(a_0, a_1, \ldots)$.

Δηλαδή ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών (ή το $\mathbb{N}\backslash\{0\}$) και τιμές στο $\mathbb{R}$. Σημειώνουμε τη διαφορά ανάμεσα στην ακολουθία $(a_0, a_1, \ldots)$ και στο σύνολο $\{a_0, a_1, \ldots\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ των τιμών της. Παραδείγματος χάριν η ακολουθία $(-1)^n = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ έχει σύνολο τιμών το $\{-1, 1\}$. Επίσης οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) όπου

$$(a_n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \ldots,)$$
$$(b_n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots,)$$

δηλαδή $a_n = \frac{1}{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ και $b_n = \begin{cases} 1/n : & n \text{ άρτιος} \\ 1/2 : & n \text{ περιττός} \end{cases}$ είναι πολύ διαφορετικές, έχουν όμως το ίδιο σύνολο τιμών $\{\frac{1}{2m} : m = 1, 2, \ldots\}$.

Ορισμός 3.2 *Έστω* (a_n) *ακολουθία και* $a \in \mathbb{R}$*. Λέμε ότι η* (a_n) ***συγκλίνει στο*** a *και γράφουμε* $a_n \to a$ *ή* $\lim_n a_n = a$ *καθώς* $n \to \infty$ *ή* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *αν:*

για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_o \in \mathbb{N}$ *(που εξαρτάται από το* ε*)*
ώστε για κάθε $n \geq n_o$ *να ισχύει* $|a_n - a| < \varepsilon$.

Συμβολικά:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_o \in \mathbb{N} : \ n \geq n_o \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Λέμε ότι η (a_n) ***συγκλίνει*** *αν υπάρχει* $a \in \mathbb{R}$ *ώστε* $\lim_n a_n = a$*. Αλλιώς λέμε ότι* ***αποκλίνει***.

Δηλαδή η (a_n) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ αν ΟΠΟΙΟ (οσοδήποτε μικρό) $\varepsilon > 0$ και να δοθεί, ΚΑΠΟΙΟ τελικό τμήμα $(a_{n_o}, a_{n_o+1}, a_{n_o+2}, \ldots)$ βρίσκεται ΟΛΟΚΛΗΡΟ στην περιοχή $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Ισοδύναμα, η (a_n) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ η σχέση $|a_n - a| \geq \varepsilon$ δεν μπορεί να ισχύει για άπειρο πλήθος δεικτών n, δηλαδή

για ΚΑΘΕ $\varepsilon > 0$ το σύνολο των δεικτών $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Επομένως, η (a_n) ΔΕΝ συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ αν

για ΚΑΠΟΙΟ $\varepsilon > 0$ το σύνολο των δεικτών $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \varepsilon\}$ είναι ΑΠΕΙΡΟ

ή ισοδύναμα ΥΠΑΡΧΕΙ $\varepsilon > 0$ ώστε ΚΑΝΕΝΑ τελικό τμήμα $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$ να ΜΗΝ βρίσκεται ΟΛΟΚΛΗΡΟ στην περιοχή $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, δηλαδή κάποιος όρος της ακολουθίας $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$ να βρίσκεται εκτός της περιοχής $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Δηλαδή

Παρατήρηση 3.1 *Η ακολουθία δεν συγκλίνει στο a αν* υπάρχει $\varepsilon > 0$ *ώστε* για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $m \geq n$ *ώστε* $|a_m - a| \geq \varepsilon$.

Παραδείγματα 3.2 *Η ακολουθία (a_n) όπου $a_n = \frac{1}{n}$ τείνει στο 0. Το ίδιο και η ακολουθία (b_n) όπου* $b_n = \begin{cases} n^n & n \leq 10^{23} \\ \frac{-80}{n} & n > 10^{23} \end{cases}$.

Η ακολουθία (c_n) όπου $c_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει, αλλά η (d_n) όπου $d_n = \frac{(-1)^n}{n}$ τείνει στο 0.

Η ακολουθία (f_n) όπου $f_n = n^2$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Ούτε η ακολουθία (g_n) όπου $g_n = \begin{cases} n^2 & n \ \text{άρτιος} \\ \frac{1}{n} & n \ \text{περιττός} \end{cases}$

Αποδείξεις Εφόσον το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο[1], για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_o} < \varepsilon$. Δεν αρκεί όμως αυτό για να εξασφαλίσουμε ότι $\frac{1}{n} \to 0$: πρέπει *όλοι οι όροι από τον n_o-οστό και πέρα* να ικανοποιούν την ανισότητα. Αυτό όμως είναι αλήθεια (στην περίπτωσή μας): αν $n \geq n_o$ τότε $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_o} < \varepsilon$.

Για την (b_n), αρκεί, για κάθε $\varepsilon > 0$, να πάρω $n_o > \max\{\frac{80}{\varepsilon}, 10^{23}\}$. Τότε, αν $n \geq n_o$ θα έχω $|b_n - 0| = \frac{80}{n} \leq \frac{80}{n_o} < \varepsilon$.

[1] Παρατήρησε ότι εδώ χρησιμοποιείται η Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{N}$, που με τη σειρά της αποδείχθηκε χρησιμοποιώντας την πληρότητα του $\mathbb{R}$.

Αν η (c_n) είχε όριο κάποιον αριθμό $c \in \mathbb{R}$, τότε θα υπήρχε $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $|c_n - c| < 1/2$ όταν $n \geq n_o$ (εφάρμοσα τον ορισμό με $\varepsilon = 1/2$). Τότε όμως θα έπρεπε να ισχύει $|c_{n+1} - c_n| \leq |c_{n+1} - c| + |c - c_n| < 1$ όταν $n \geq n_o$, πράγμα που δεν ισχύει αφού $|c_{n+1} - c_n| \geq 1$ για κάθε n.

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι και οι άλλες δύο ακολουθίες δεν συγκλίνουν, γιατί $|f_{n+1} - f_n| = 2n + 1 \geq 1$ και $|g_{n+1} - g_n| \geq 1$ για κάθε $n > 1$. □

Παρατηρήσεις 3.3 (i) *Αν $a_n \to a$ τότε $|a_n| \to |a|$. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει εν γένει, όταν $a \neq 0$ (Άσκηση!).*

(ii) *Είναι άμεσο από τον ορισμό της σύγκλισης ότι η σχέση $a_n \to a$ ισοδυναμεί με την $|a_n - a| \to 0$.*

(iii) *Η σύγκλιση και η τιμή του ορίου μιας ακολουθίας (a_n) εξαρτώνται μόνον από ένα «τελικό τμήμα» $(a_n)_{n \geq n_o}$ της ακολουθίας: π.χ. όπως είδαμε στα προηγούμενα Παραδείγματα, η ακολουθία (b_n) έχει το ίδιο όριο με την $\left(\frac{-80}{n}\right)$, γιατί οι δύο ακολουθίες ταυτίζονται για κάθε $n > 10^{23}$.*

Επίσης αν το όριο $\lim_n a_n$ υπάρχει, τότε υπάρχει και το όριο $\lim_n a_{n+1}$ και είναι ίσα. Γενικότερα, αν $k \in \mathbb{Z}$ και $b_n = a_{n+k}$ $(n \geq -k)$, η ακολουθία (a_n) συγκλίνει σ'έναν αριθμό a αν και μόνον αν η ακολουθία $(b_n)_{n \geq -k}$ συγκλίνει στο a. (Η απόδειξη είναι άμεση από τον ορισμό της σύγκλισης και αφήνεται ώς άσκηση.)

Ανάμεσα στις ακολουθίες που αποκλίνουν, μια ειδική κλάση αξίζει να απομονωθεί: εκείνες που, κατ'απόλυτο τιμή, γίνονται «αυθαίρετα μεγάλες» (όπως η (f_n) στο τελευταίο παράδειγμα):

Ορισμός 3.3 *Λέμε ότι η ακολουθία (a_n) **τείνει στο** $+\infty$ αν για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ (που εξαρτάται από το M) ώστε $a_n > M$ για κάθε $n \geq n_o$.*

*Λέμε ότι η (a_n) **τείνει στο** $-\infty$ αν για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ (που εξαρτάται από το M) ώστε $a_n < M$ για κάθε $n \geq n_o$.*

(Τονίζουμε ότι οι ακολουθίες αυτές αποκλίνουν!)

Πρόταση 3.4 (Μοναδικότητα ορίου) *Αν $a_n \to a$ και $a_n \to b$, τότε $a = b$.*

Απόδειξη Έστω $a \neq b$. Αφού $a_n \to a$, για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{όταν} \ \ n \geq n_o. \tag{1}$$

Αφού $a_n \to b$, για το ίδιο ε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad \text{όταν} \ \ n \geq n_1. \tag{2}$$

Επομένως αν $n \geq n_o$ και $n \geq n_1$ (π.χ. $n = \max\{n_o, n_1\}$) ικανοποιούνται ταυτόχρονα και οι δύο ανισότητες. Τότε όμως

$$|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon = |a - b|$$

δηλ. $|a - b| < |a - b|$, πράγμα αδύνατο. $\square$

Ορισμός 3.4 *Λέμε ότι η ακολουθία (a_n) είναι* ***άνω φραγμένη (κάτω φραγμένη, φραγμένη)*** *αν το σύνολο $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ των όρων της είναι άνω φραγμένο (κάτω φραγμένο, φραγμένο).*

Δηλαδή η (a_n) είναι:
άνω φραγμένη αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
κάτω φραγμένη αν υπάρχει $M' \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \geq M'$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και
φραγμένη αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλ. ισοδύναμα αν υπάρχει $K > 0$ ώστε $|a_n| \leq K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 3.5 *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη (το αντίστροφο όμως δεν ισχύει εν γένει).*

Απόδειξη Έστω ότι $a_n \to a$. Τότε (για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = 1$) υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < 1$, άρα $|a_n| < |a| + 1$, όταν $n \geq n_o$. Δηλαδή το σύνολο

$$\{a_{n_o}, a_{n_o+1}, a_{n_o+2}, \ldots\} = \{a_n : n \geq n_o\}$$

είναι φραγμένο (π.χ. από τον αριθμό $|a| + 1$). Όμως το «υπόλοιπο» σύνολο

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_o-1}\}$$

είναι πεπερασμένο, συνεπώς και αυτό φραγμένο (κάποιος από τους όρους αυτούς, έστω ο $|a_k|$, όπου $k < n_o$, θα έχει την μέγιστη απόλυτη τιμή). Άρα και η ένωση των δύο συνόλων, δηλαδή το $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, θα είναι φραγμένο (π.χ. από το $\max\{|a| + 1, |a_k|\}$).

Παράδειγμα φραγμένης ακολουθίας που δεν συγκλίνει είναι η $((-1)^n)$ (δες παράδειγμα 3.2). $\square$

Πρόταση 3.6 *Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$, τότε:*

(1) $a_n + b_n \to a + b$

(2) $\lambda a_n \to \lambda a$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) $a_n . b_n \to a.b$

(4) Αν $b \neq 0$, τότε υπάρχει n_o ώστε $b_n \neq 0$ για κάθε $n \geq n_o$ και η ακολουθία $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_o}$ *συγκλίνει στο* $\dfrac{a}{b}$.

Απόδειξη του (1) Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Για να πετύχουμε το $|(a_n + b_n) - (a + b)|$ να είναι μικρότερο από ε, ΑΡΚΕΙ να κάνουμε κάθε προσθετέο μικρότερο από $\varepsilon/2$. Έστω n_1 ώστε $|a_n - a| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_1$ (υπάρχει τέτοιο n_1 εφόσον $a_n \to a$). Έστω n_2 ώστε $|b_n - b| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_2$ (υπάρχει τέτοιο n_2 εφόσον $b_n \to b$). Τότε για κάθε n μεγαλύτερο ή ίσο και από τα δύο (δηλ. $n \geq \max\{n_1, n_2\}$) έχουμε $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$.

Απόδειξη του (2) Αν $\lambda = 0$ δεν υπάρχει τίποτε να αποδειχθεί. Αν $\lambda \neq 0$ και δοθεί $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να ισχύει $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, οπότε $|\lambda a_n - \lambda a| < \varepsilon$.

Απόδειξη του (3) Παρατηρούμε ότι η (a_n) είναι φραγμένη, αφού συγκλίνει. Υπάρχει λοιπόν $M > 0$ ώστε $|a_n| \leq M$ για κάθε n. Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n|.|b_n - b| + |a_n - a|.|b| \leq M.|b_n - b| + |a_n - a|.|b| \end{aligned}$$

Αφού $|a_n - a| \to 0$ και $|b_n - b| \to 0$, από το (2) έχουμε ότι $|a_n - a|.|b| \to 0$ και $M.|b_n - b| \to 0$, άρα $M.|b_n - b| + |a_n - a|.|b| \to 0$ από το (1). Συνεπώς υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|M.|b_n - b| + |a_n - a|.|b|| < \varepsilon$ και κατά συνέπεια

$$|a_n . b_n - a.b| \leq M.|b_n - b| + |a_n - a|.|b| < \varepsilon\,.$$

Απόδειξη του (4) Παρατήρησε πρώτα ότι αν $x > 0$ και $|y - x| < \frac{x}{2}$ τότε $|y| > \frac{x}{2}$. Εφόσον $b_n \to b$, υπάρχει n_o ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να ισχύει $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$.

Τότε

$$||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \text{ άρα } |b_n| > \frac{|b|}{2}$$

(οπότε $b_n \neq 0$ για κάθε $n \geq n_o$) και

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| < \frac{|b - b_n|}{|b|\frac{|b|}{2}} = 2\frac{|b - b_n|}{b^2}.$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Επιλέγοντας n_1 ώστε $n_1 \geq n_o$ και $2\frac{|b-b_n|}{b^2} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_1$ (υπάρχει τέτοιο n_1 εφόσον $b_n \to b$) έχουμε $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_1$.

Δείξαμε λοιπόν ότι η ακολουθία $(\frac{1}{b_n})_{n \geq n_o}$ συγκλίνει στο $\frac{1}{b}$. Επομένως, από το (3), η ακολουθία $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq n_o}$ συγκλίνει στο $\frac{a}{b}$. $\square$

Σημείωση Το αντίστροφο της Πρότασης δεν ισχύει. Αντιπαραδείγματα: $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$.

Παρατήρηση 3.7 *Αν $a_n \to a$, $b_n \to b$ και $a_n \leq b_n$ για κάθε n τότε $a \leq b$. Αν όμως $a_n < b_n$ για κάθε n δεν έπεται ότι $a < b$ αλλά μόνον ότι $a \leq b$.*

Πρόταση 3.8 *Έστω ότι υπάρχει n_o ώστε $a_n \leq b_n \leq c_n$ για κάθε $n \geq n_o$. Αν $\lim_n a_n = a$ και $\lim_n c_n = a$, τότε το όριο $\lim_n b_n$ υπάρχει και $\lim_n b_n = a$.*

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Βρες $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\text{για κάθε } n \geq n_1 \text{ να ισχύει } \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \tag{3}$$

Βρες $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\text{για κάθε } n \geq n_2 \text{ να ισχύει } \quad a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon. \tag{4}$$

Τότε για κάθε $n \geq \max\{n_o, n_1, n_2\}$ ισχύουν οι δύο τελευταίες ανισότητες καθώς και η $a_n \leq b_n \leq c_n$ και συνεπώς

$$a - \varepsilon \overset{(3)}{<} a_n \leq b_n \leq c_n \overset{(4)}{<} a + \varepsilon$$

άρα $|b_n - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq \max\{n_o, n_1, n_2\}$, πράγμα που δείχνει ότι η ακολουθία (b_n) συγκλίνει, και μάλιστα στο a. $\square$

Για παράδειγμα, αν $|b_n| \leq c_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $c_n \to 0$, τότε ($|b_n| \to 0$ άρα) $b_n \to 0$. Έτσι αποδεικνύεται π.χ. ότι $\frac{100}{n^3} \to 0$, εφόσον $\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{100}{n^3} \leq \frac{1}{n}$ όταν $n \geq 10$.

Άσκηση 3.9 $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρω n_o ώστε $\frac{1}{\sqrt{n_o}} < \varepsilon$, ισοδύναμα (αφού $n_o > 0$) $\frac{1}{n_o} < \varepsilon^2$, δηλαδή $n_o > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Υπάρχει τέτοιο n_o εφόσον το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο[2]. Για κάθε $n \geq n_o$ έχω

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_o}} < \varepsilon\,. \qquad \square$$

Πρόταση 3.10 *(1) Αν $a > 0$, $\lim_n a^{1/n} = 1$, (2) $\lim_n n^{1/n} = 1$.*

Απόδειξη (1) Έστω πρώτα $a \geq 1$. Τότε $a^{1/n} \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε ο αριθμός $b_n = a^{1/n} - 1$ είναι μη αρνητικός. Έχω $a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$ από το διωνυμικό ανάπτυγμα ή την ανισότητα Bernoulli, άρα, για κάθε $n \geq 1$,

$$0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n},$$

αλλά $\frac{a-1}{n} \to 0$, άρα $b_n \to 0$ από την Πρόταση 3.8.

Αν $a < 1$ τότε $\frac{1}{a} > 1$ και άρα $\frac{1}{a^{1/n}} = (\frac{1}{a})^{1/n} \to 1$.

(2) Για $n > 2$ έχω $n^{1/n} > 1$, οπότε $d_n \equiv n^{1/n} - 1 > 0$. Από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχω

$$n = (1 + d_n)^n = 1 + nd_n + \frac{n(n-1)}{2}d_n^2 + \ldots + d_n^n \geq \frac{n(n-1)}{2}d_n^2$$

άρα $1 \geq \dfrac{n-1}{2}d_n^2$ και συνεπώς

$$0 < d_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}\,.$$

Αλλά $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$ από την Άσκηση 3.9, άρα $d_n \to 0$. $\square$

Ας θυμηθούμε ότι μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού $X \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται **αύξουσα** αν για κάθε $x, y \in X$ με $x < y$ ισχύει $f(x) \leq f(y)$. Αφού μια ακολουθία είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$, η ακολουθία (a_n) θα

[2] Μάλιστα το ελάχιστο κατάλληλο n_o είναι το $[\frac{1}{\varepsilon^2}] + 1$, αλλά δεν έχει σημασία.

είναι αύξουσα αν $a_n \leq a_m$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n < m$. Αυτό βεβαίως συνεπάγεται ότι $a_n \leq a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλά και αντίστροφα, αν ισχύει η σχέση $a_n \leq a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η (a_n) είναι αύξουσα. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{N}$ έχουμε[3] $a_n \leq a_{n+k}$. Επομένως αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n < m$, θέτοντας $k = m - n$, έχουμε $a_n \leq a_{n+k} = a_m$. Συνοψίζουμε:

Παρατήρηση 3.11 *Μια ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών είναι:*

- ***αύξουσα*** *αν $a_n \leq a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
- ***γνησίως αύξουσα*** *αν $a_n < a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
- ***φθίνουσα*** *αν $a_n \geq a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
- ***γνησίως φθίνουσα*** *αν $a_n > a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
- ***μονότονη*** *αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.*
- ***γνησίως μονότονη*** *αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.*

Παρατήρησε ότι μια σταθερή ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα.

Θεώρημα 3.12
Κάθε μονότονη και φραγμένη *ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει. Αν η (a_n) είναι* αύξουσα και άνω φραγμένη *τότε $\lim_n a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, ενώ αν είναι* φθίνουσα και κάτω φραγμένη *τότε $\lim_n a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Παρατήρηση Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει: μια συγκλίνουσα ακολουθία (είναι βεβαίως φραγμένη (Πρόταση 3.5) αλλά) δεν είναι αναγκαστικά μονότονη: παράδειγμα η $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

Απόδειξη Θεωρήματος Ας υποθέσουμε ότι η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη (η άλλη περίπτωση αποδεικνύεται όμοια). Το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενό και κάτω φραγμένο. Επομένως από την *ιδιότητα της πληρότητας*[4] το A έχει μέγιστο κάτω φράγμα (infimum), έστω a.

[3] Αυτό αποδεικνύεται με επαγωγή στο k: Για $k = 1$ η ανισότητα ισχύει εξ υποθέσεως, και αν $a_n \leq a_{n+j}$ τότε, εφαρμόζοντας πάλι την υπόθεση για τον φυσικό αριθμό $n + j$ έχουμε $a_{n+j} \leq a_{n+j+1}$ και συνεπώς $a_n \leq a_{n+j} \leq a_{n+j+1}$.

[4] για την ακρίβεια, από ένα άμεσο πόρισμά της

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού ο αριθμός $a+\varepsilon$ δεν είναι κάτω φράγμα του A, υπάρχει κάποιο $a_{n_o} \in A$ ώστε $a_{n_o} < a + \epsilon$. Αλλά η (a_n) είναι φθίνουσα, επομένως για κάθε $n \geq n_o$ έχουμε $a_n \leq a_{n_o}$, άρα $a_n < a + \varepsilon$. Από την άλλη μεριά, το a είναι κάτω φράγμα του A, άρα $a_n \geq a > a - \varepsilon$ για κάθε n.

Δείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_o ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να ισχύει $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Συνεπώς $a_n \to a$. $\square$

Άσκηση 3.13 *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο. Υπάρχει τότε μια αύξουσα ακολουθία (a_n) με $a_n \in A$ για κάθε n ώστε $a_n \to \sup A$ και μια φθίνουσα ακολουθία (b_n) με $b_n \in A$ για κάθε n ώστε $b_n \to \inf A$.*

Άσκηση 3.14 *Κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι όριο μιας ακολουθίας ρητών (και μιας ακολουθίας αρρήτων). Μάλιστα, υπάρχει μια γνησίως αύξουσα και μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία ρητών που να συγκλίνει στο x.*

Παράδειγμα 3.15 *Έστω $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$. Η (a_n) συγκλίνει στον αριθμό $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (τη χρυσή τομή).*

Απόδειξη Θα δείξουμε, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι η (a_n) είναι καλά ορισμένη (δηλ. ότι για κάθε n ισχύει $1 + a_n \geq 0$), αύξουσα και φραγμένη. Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε n ισχύει $a_n \geq 1$ (άρα $1 + a_n \geq 0$) και $a_{n+1} \geq a_n$. Παρατηρούμε ότι $a_2 = \sqrt{1+1} > 1 = a_1$. Έστω τώρα $m \in \mathbb{N}$. Αν $a_{m+1} \geq a_m$ και $a_m \geq 1$, έχουμε $a_{m+1} \geq 1$ και

$$a_{m+2} = \sqrt{1 + a_{m+1}} \geq \sqrt{1 + a_m} = a_{m+1}$$

και το επαγωγικό βήμα αποδείχθηκε.

Θα δείξουμε τώρα ότι $a_n \leq 2$ για κάθε n. Η ανισότητα ισχύει για $n = 1$, αφού $a_1 = 1$. Αλλά, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$a_m \leq 2 \;\Rightarrow\; a_{m+1} = \sqrt{1 + a_m} \leq \sqrt{1+2} \leq 2$$

άρα η ανισότητα ισχύει για κάθε n.

Από το Θεώρημα 3.12 έπεται τώρα ότι η (a_n) συγκλίνει σε κάποιον αριθμό a. Εφόσον $1 \leq a_n \leq 2$ για κάθε n θα έχουμε $1 \leq a \leq 2$. Πώς όμως θα προσδιορίσουμε την τιμή του a; Χρησιμοποιούμε την αναδρομική σχέση $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$: επειδή $\lim_n a_{n+1} = a$ (Παρατήρηση 3.3 (iii)), έπεται ότι

$$a^2 = \lim_n a_{n+1}^2 = \lim_n (1+a_n) = 1+a$$

και συνεπώς $a^2 - a - 1 = 0$, πράγμα που συνεπάγεται ότι $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, γιατί η άλλη ρίζα $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ της εξίσωσης δεν ικανοποιεί την ανισότητα $a \geq 1$.

Πρόταση 3.16 *Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim_n a^n = 0$.*

Πρώτη απόδειξη Η ακολουθία (a^n) είναι (γνησίως) φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0. Από το Θεώρημα 3.12, υπάρχει το όριο $b = \lim_n a^n$. Εφόσον $a^n > 0$ για κάθε n, έχουμε $b \geq 0$. Παρατήρησε ότι οι ακολουθίες (a^n) και (a^{n+1}) έχουν το ίδιο όριο (Παρατήρηση 3.3 (iii)). Συνεπώς

$$ba = (\lim_n a^n)a = \lim_n a^{n+1} = \lim_n a^n = b \quad \Rightarrow \quad b(1-a) = 0.$$

Αλλά $a \neq 1$, άρα $b = 0$.

Δεύτερη απόδειξη Εφόσον $\frac{1}{a} > 1$, έχουμε $\frac{1}{a} - 1 \equiv d > 0$. Από την ανισότητα Bernoulli ή το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε ότι $(1+d)^n \geq 1 + nd$ οπότε

$$0 \leq a^n = \frac{1}{(1+d)^n} \leq \frac{1}{1+nd} \to 0$$

και άρα $a^n \to 0$ από την Πρόταση 3.8.

Άσκηση 3.17 *Έστω $a_n \geq 0$ για κάθε n. Αν υπάρχει $\rho \in (0,1)$ ώστε $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$ για κάθε[5] $n \in \mathbb{N}$, τότε το όριο $\lim_n a_n$ υπάρχει και είναι 0.*

Απόδειξη Εφόσον $0 < \rho < 1$, το όριο $\lim_n \rho^n$ υπάρχει και είναι 0. Αλλά

$$0 \leq a_n \leq \rho^n \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

άρα, εφόσον $\rho^n \to 0$, το όριο $\lim_n a_n$ υπάρχει και είναι 0.

[5] Όπως φαίνεται από την απόδειξη, αρκεί η ανισότητα να ικανοποιείται «τελικά», να υπάρχει δηλαδή κάποιο $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt[n]{a_n} \leq \rho$ για κάθε $n \geq n_o$.

Παρατήρηση 3.18 **Δεν αρκεί** να ισχύει η ανισότητα $\sqrt[n]{a_n} < 1$ για κάθε n. Είναι κρίσιμο να μπορεί να βρεθεί φράγμα ρ γνήσια μικρότερο από 1. Παραδείγματος χάριν αν $a_n = \frac{1}{n^{1/n}}$, τότε $\sqrt[n]{a_n} < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αλλά η (a_n) δεν συγκλίνει στο 0 (Πρόταση 3.10).

Λήμμα 3.19 ***(ι)*** *Έστω ακολουθία (a_n) και $\mu \in [0, 1)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_{n+1}| \leq \mu |a_n|$ για κάθε $n \geq k$. Τότε το όριο $\lim_n a_n$ υπάρχει και είναι 0.*

(ιι) *Αν $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η ακολουθία $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ συγκλίνει σ'έναν αριθμό $\lambda < 1$, τότε το όριο $\lim_n a_n$ υπάρχει και είναι 0.*

Απόδειξη Θέτω $b_n = |a_n|$.
(ι) Πρέπει να δείξω ότι το $\lim_n b_n$ υπάρχει και είναι 0. Έχουμε
$b_{k+1} \leq b_k \mu$, $b_{k+2} \leq b_{k+1} \mu \leq b_k \mu^2$ και επαγωγικά

$$0 \leq b_{k+n} \leq b_k \mu^n \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αλλά εφόσον $0 < \mu < 1$ έχουμε $\mu^n \to 0$ και άρα $\lim_n b_n = \lim_n b_{n+k} = 0$.

Άλλη απόδειξη: Αφού $b_{n+1} \leq b_n \mu \leq b_n$ για κάθε $n \geq k$, η (b_n) είναι τελικά φθίνουσα επομένως συγκλίνει, έστω στο $b \geq 0$. Όμως, αφού $b_{n+1} \leq b_n \mu$ για κάθε $n \geq k$ έχουμε

$$0 \leq b = \lim_n b_{n+1} \leq \lim_n b_n \mu = b\mu$$

άρα $b(1 - \mu) \leq 0$. Εφόσον $b \geq 0$ και $1 - \mu > 0$, έπεται ότι $b = 0$.

(ιι) Έστω ότι η ακολουθία $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ συγκλίνει σ'έναν αριθμό $\lambda < 1$. Επιλέγω μ ώστε $\lambda < \mu < 1$ (υπάρχει τέτοιο μ γιατί $\lambda < 1$). Αφού $\frac{b_{n+1}}{b_n} \to \lambda$ υπάρχει k ώστε $\frac{b_{n+1}}{b_n} < \mu$ για κάθε $n \geq k$. Έπεται από το (ι) ότι το όριο $\lim_n b_n$ υπάρχει και είναι 0. $\square$

Παρατήρηση 3.20 Και εδώ οι υποθέσεις $0 \leq \mu < 1$, $0 \leq \lambda < 1$ δεν μπορούν εν γένει να παραλειφθούν. Για παράδειγμα αν $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ τότε $|a_{n+1}| < |a_n|$ για κάθε n αλλά η (a_n) δεν συγκλίνει στο 0.

Πρόταση 3.21 *Αν $0 < a < 1$ και $k \in \mathbb{Z}$ τότε $\lim_n n^k a^n = 0$.*

Απόδειξη Θέτοντας $x_n = n^k a^n$ έχουμε

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{(n+1)^k a^{n+1}}{n^k a^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k a \to a\,.$$

Εφόσον $a < 1$, το αποτέλεσμα έπεται από το Λήμμα. $\square$

Πρόταση 3.22 *Η ακολουθία (a_n) όπου $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ συγκλίνει σ'έναν αριθμό e με $2 < e < 3$.*

Πρώτη απόδειξη. Ισχυρισμός 1 Η (a_n) είναι αύξουσα, δηλ. $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε n:

Χρησιμοποιώ την ανισότητα αριθμητικού μέσου - γεωμετρικού μέσου

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}$$

για τους θετικούς αριθμούς

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{και} \quad x_{n+1} = 1$$

οπότε έχω

$$\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .1}$$

δηλαδή

$$1 + \frac{1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\,.$$

Υψώνοντας και τα δύο μέλη της ανισότητας αυτής (που είναι θετικά) στην $n+1$, προκύπτει η επιθυμητή ανισότητα

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Ισχυρισμός 2 Η (a_n) είναι φραγμένη, και μάλιστα $2 < a_n < 3$ για κάθε $n \geq 2$:

Έχουμε $a_1 = 2$, $a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$ και για κάθε $n \geq 2$, από το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n}{n}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n}) < 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Αλλά $k! = 1.2.3\dots k$, άρα, όταν $k \geq 2$, τότε $k! \geq 1.2.2\dots 2 = 2^{k-1}$ οπότε

$$a_n < 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\,.$$

Όμως όπως είναι γνωστό το άθροισμα των όρων γεωμετρικής προόδου είναι

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2$$

και συνεπώς $a_n < 3$ για κάθε n.

Έπεται τώρα από το Θεώρημα 3.12 ότι η (a_n) συγκλίνει, και αν θέσουμε $e = \lim a_n$ τότε εφόσον $\frac{9}{4} \leq a_n < 3$ για κάθε $n \geq 2$ έχουμε $2 < \frac{9}{4} \leq e \leq 3$, αλλά δεν μπορούμε αμέσως να συμπεράνουμε ότι $e < 3$.

Μπορούμε όμως να βελτιώσουμε την προσέγγιση ως εξής: αν $n \geq 4$,

$$\begin{aligned} a_n < 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k!}\right) \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} \\ &\leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{11}{12} \end{aligned}$$

άρα $e \leq 2 + \frac{11}{12} < 3$.

Δεύτερη απόδειξη Έστω $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

Ισχυρισμός Η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) είναι φθίνουσα.

Απόδειξη Ισχυρισμού: Για $n \geq 2$, έχουμε $a_n = (1+\frac{1}{n})^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, $b_{n-1} = (1+\frac{1}{n-1})^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$, οπότε

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{b_{n-1}} &= \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \overset{Ber}{>} 1 - n\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησα την ανισότητα Bernoulli. Επομένως

$$\begin{aligned}a_n > b_{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right) &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1}.\end{aligned}$$

άρα η (a_n) είναι αύξουσα. Επίσης

$$\frac{b_{n-1}}{a_n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \overset{Ber}{>} 1+n\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

οπότε

$$b_{n-1} > a_n\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = b_n$$

άρα η (b_n) είναι φθίνουσα. Ενδεικτικά, οι πρώτοι όροι είναι:

$$\begin{array}{llll} a_1 = & (1+\frac{1}{1})^1 & = 2 & b_1 = & (1+\frac{1}{1})^2 & = 4 \\ a_2 = & (1+\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} & = 2.25 & b_2 = & (1+\frac{1}{2})^3 = \frac{27}{8} & = 3.375 \\ a_3 = & (1+\frac{1}{3})^3 = \frac{64}{27} & \simeq 2.3704 & b_3 = & (1+\frac{1}{3})^4 = \frac{256}{81} & \simeq 3.1605 \\ a_4 = & (1+\frac{1}{4})^4 = \frac{625}{256} & \simeq 2.4414 & b_4 = & (1+\frac{1}{4})^5 = \frac{3125}{1024} & \simeq 3.0518 \\ a_5 = & (1+\frac{1}{5})^5 = \frac{7776}{3125} & \simeq 2.4883 & b_5 = & (1+\frac{1}{5})^6 = \frac{46656}{15625} & \simeq 2.986 \end{array}$$

Έπεται τώρα από το Θεώρημα 3.12 ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν. Μάλιστα επειδή το πηλίκο $\frac{b_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{n}$ συγκλίνει στο 1, οι δύο ακολουθίες θα έχουν το ίδιο όριο, e.
Τέλος, για $n > 5$,

$$\frac{9}{4} = a_2 < a_n < b_n < b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = \frac{46656}{15625} < 3$$

άρα $$2 < a_n \leq e \leq b_n < 3\,. \quad \Box$$

Παρατήρηση 3.23 *Οι ανισότητες*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

που αποδείξαμε επιτρέπουν την προσέγγιση του αριθμού e του Euler με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια, *αρκεί να πάρουμε αρκετά μεγάλο* n.

Άσκηση 3.24 *Αν η ακολουθία* (a_n) *συγκλίνει στο* a *τότε και η ακολουθία* (b_n) *των* μέσων όρων

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

συγκλίνει επίσης στο a. *Ισχύει το αντίστροφο;*

Λύση Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $a_n \to 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n| < \frac{\epsilon}{2}$ όταν $n \geq n_o$. Έστω $n > n_o$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |b_n| =& \left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_o}}{n} + \frac{a_{n_o+1} + a_{n_o+2} + \ldots + a_n}{n}\right| \\ \leq& \frac{|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{n_o}|}{n} + \frac{|a_{n_o+1}| + |a_{n_o+2}| + \ldots + |a_n|}{n} \\ <& \frac{|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{n_o}|}{n} + \frac{n\frac{\epsilon}{2}}{n}. \end{aligned}$$

Αλλά ο αριθμητής του πρώτου κλάσματος δεν εξαρτάται από το n, άρα το κλάσμα αυτό τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$. Συνεπώς υπάρχει $n_1 > n_o$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να έχουμε

$$\frac{|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{n_o}|}{n} < \frac{\epsilon}{2},$$

και τότε

$$|b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι $b_n \to 0 = \lim_n a_n$.

Για την γενική περίπτωση όπου $a_n \to a$ αρκεί να εξετάσουμε την μηδενική ακολουθία $a'_n \equiv a_n - a$ και να παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} - a$$

οπότε, αφού οι μέσοι όροι της (a'_n) τείνουν στο 0 από τα προηγούμενα, οι μέσοι όροι της (a_n) θα τείνουν στο a.

Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε την ακολουθία (a_n) με $a_n = -1$ όταν n περιττός και $a_n = 1$ όταν n άρτιος, είναι φανερό ότι η (a_n) δεν συγκλίνει, ενώ οι μέσοι όροι της μοιάζουν να τείνουν «στη μέση». Και πραγματικά,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} = -1 \qquad \text{και} \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = 0$$

άρα

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \right| \leq \frac{1}{m}$$

για κάθε m, επομένως η ακολουθία των μέσων όριων συγκλίνει, και μάλιστα στο 0.

Πρόταση 3.25 (Αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων) *αν $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φραγμένων διαστημάτων, τότε υπάρχει ένα σημείο που ανήκει σε όλα τα I_n (δηλαδή η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ δεν είναι κενή). Αν μάλιστα τα μήκη τους τείνουν στο 0, τότε υπάρχει ένα και μοναδικό σημείο που ανήκει σε όλα τα I_n.*

Απόδειξη Αν $I_n = [x_n, y_n]$ τότε, εφόσον $I_{n+1} \subseteq I_n$, έχουμε $x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα και η (y_n) είναι φθίνουσα. Επίσης η (x_n) είναι άνω φραγμένη (από κάθε όρο της (y_n)) και η (y_n) είναι κάτω φραγμένη (από κάθε όρο της (x_n)). Αν $x = \sup\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$ και $y = \inf\{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ από το Θεώρημα 3.12 έπεται ότι και οι δύο ακολουθίες θα συγκλίνουν, και μάλιστα $\lim_n x_n = x$ και $\lim_n y_n = y$. Αφού $x_n \leq y_n$ για κάθε n έχουμε $x \leq y$. Κάθε $a \in [x, y]$ ικανοποιεί $a \geq x \geq x_n$ για κάθε n, και ομοίως $a \leq y_n$ για κάθε n, δηλαδή $a \in [x_n, y_n]$ για κάθε n. Δείξαμε λοιπόν ότι η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ δεν είναι κενή. Μάλιστα κάθε $b \in \mathbb{R}$ που ανήκει σε όλα τα I_n ικανοποιεί $x_n \leq b \leq y_n$ για κάθε n και συνεπώς $x \leq b \leq y$, δηλαδή $b \in [x, y]$. Επομένως $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [x, y]$.

Αν επιπλέον έχουμε $y_n - x_n \to 0$, τότε $x = y$ και κατά συνέπεια η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [x, y]$ είναι μονοσύνολο. $\square$