4 Συναρτήσεις

Αν X, Y είναι δύο μη κενά σύνολα, μια **συνάρτηση** από το X στο Y είναι μια αντιστοίχιση, που αντιστοιχίζει σε **κάθε στοιχείο** του X, **ένα και μοναδικό στοιχείο του** Y. Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην αντιστοίχιση αυτή. Αρκεί κάθε στοιχείο του X να έχει μία και μοναδική «εικόνα» στο Y.

Δηλαδή συνάρτηση είναι ένα σύνολο f από *διατεταγμένα ζεύγη*[1] (x, y) με πρώτο στοιχείο $x \in X$ και δεύτερο στοιχείο $y \in Y$, που ικανοποιεί τις εξής δύο προϋποθέσεις:

(α) Για **κάθε** $x \in X$ υπάρχει $y \in Y$ ώστε $(x, y) \in f$ και

(β) Αυτό το y είναι μοναδικό, δηλαδή αν $(x, y_1) \in f$ και $(x, y_2) \in f$ τότε $y_1 = y_2$.

Αν $x \in X$, το μοναδικό $y \in Y$ για το οποίο ισχύει $(x, y) \in f$ συμβολίζουμε $f(x)$ και γράφουμε συνήθως $f : X \to Y$ για να δηλώσουμε ότι η f είναι μια συνάρτηση από το X στο Y.

Αν $f : X \to Y$ είναι μια συνάρτηση, το X ονομάζεται **πεδίο ορισμού** και το Y **πεδίο τιμών** της f. Στην πραγματικότητα μια συνάρτηση αποτελείται από τρία αντικείμενα: (ι) το πεδίο ορισμού X (από όπου «ξεκινάει» η συνάρτηση), (ιι) το πεδίο τιμών Y (όπου «καταλήγει») και (ιιι) την «αντιστοίχιση» ενός και μοναδικού σημείου $f(x)$ του Y σε κάθε σημείο x του X.

Σύνολο τιμών ή εικόνα της f είναι το σύνολο

$$f(X) = \{y \in Y : \text{ υπάρχει } x \in X \text{ ώστε } f(x) = y\} \equiv \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y.$$

Η συνάρτηση f λέγεται **επί** αν $f(X) = Y$, δηλαδή αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει κάποιο (ενδεχομένως πολλά) $x \in X$ ώστε $f(x) = y$.

Η συνάρτηση f λέγεται **1-1** αν κάθε $y \in f(X)$ είναι η εικόνα *μοναδικού* $x \in X$, δηλαδή αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ έχουμε $f(x_1) \neq f(x_2)$, ή ισοδύναμα, αν από τις σχέσεις $(x_1, y) \in f$ και $(x_2, y) \in f$ έπεται ότι $x_1 = x_2$.

Αν $f : X \to Y$ και $g : W \to Z$ είναι συναρτήσεις, και αν $f(X) \subseteq W$, τότε η **σύνθεση** $g \circ f : X \to Z$ ορίζεται ως εξής

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & f(X) \subseteq W & \xrightarrow{g} & Z \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}$$

[1] δηλαδή ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$

δηλαδή
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (x \in X).$$
Αν X είναι τυχαίο σύνολο, **η ταυτοτική συνάρτηση** $id_X : X \to X$ ορίζεται ως εξής: $id_X(x) = x, \;\; x \in X$.

Πρόταση 4.1 *Έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Τότε*

Υπάρχει $g : Y \to X$ ώστε $g \circ f = id_X$ αν και μόνον αν η f είναι 1-1.

Απόδειξη Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση g, τότε αναγκαστικά η f θα είναι 1-1. Πραγματικά, αν $x_1, x_2 \in X$ και $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ άρα
$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$
Αντίστροφα, αν η f είναι 1-1 τότε μπορώ να ορίσω μια κατάλληλη g: Στην εικόνα $f(X)$, ορίζω την g ως εξής: Έστω $y \in f(X)$. Τότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $f(x) = y$, και δεν υπάρχει άλλο στοιχείο του X με αυτήν την ιδιότητα. Ορίζω λοιπόν $g(y) = x$. Στο σύνολο $Y \setminus f(X)$, ορίζω την g αυθαίρετα: επιλέγω τυχαίο $x_o \in X$ και για κάθε $y \in Y \setminus f(X)$ θέτω $g(y) = x_o$. Από την κατασκευή είναι φανερό ότι $g \circ f = Id_X$. $\square$

Για παράδειγμα αν $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : x \to x^2$ μπορώ να ορίσω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ από τον τύπο $g(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{αν } y \geq 0 \\ 16 & \text{αν } y < 0 \end{cases}$ (βεβαίως η επιλογή του 16 είναι αυθαίρετη). Έχω τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$, $g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$, αφού $x \geq 0$.

Παρατήρησε όμως ότι η g δεν ικανοποιεί τη σχέση $f \circ g = id_{\mathbb{R}}$. Πράγματι, αν $y < 0$ τότε $f(g(y)) = f(16) = 256 \neq y$.

Επίσης, δεν υπάρχει μόνον μία, αλλά πολλές συναρτήσεις g που ικανοποιούν τη σχέση $g \circ f = id_{\mathbb{R}_+}$.

Αυτό συμβαίνει επειδή η f δεν είναι επί.

Έστω $f : X \to Y$ μία συνάρτηση. Όπως είναι γνωστό, *υπάρχει μία συνάρτηση $g : Y \to X$ που ικανοποιεί και τις δύο σχέσεις $f \circ g = id_Y$ και $g \circ f = id_X$ αν και μόνον αν η f είναι 1-1 και επί.* Η συνάρτηση αυτή, όταν υπάρχει, είναι μοναδική. Ονομάζεται η αντίστροφη της f και συμβολίζεται f^{-1}.

Καταχρηστικά θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο f^{-1} όταν η f είναι 1-1, για την αντίστροφη της συνάρτησης $f : X \to f(X)$:

Ορισμός 4.1 *Αν η f είναι 1-1, τότε η **αντίστροφη συνάρτηση** f^{-1} ορίζεται στο σύνολο τιμών $f(X)$ ως εξής:*
$$f^{-1} : f(X) \to X : f(x) \to x$$

Δηλαδή για κάθε $y \in f(X)$, *η τιμή* $f^{-1}(y)$ *είναι* ο μοναδικός αριθμός $x \in X$ *που ικανοποιεί τη σχέση* $f(x) = y$.

Πρόταση 4.2 *Αν η* $f : X \to Y$ *είναι 1-1, τότε ορίζεται η* $f^{-1} : f(X) \to X$ *και*

(ι) $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ *για κάθε* $x \in X$ *(δηλαδή* $f^{-1} \circ f = id_X$*) και*

(ιι) $(f \circ f^{-1})(y) = y$ *για κάθε* $y \in f(X)$ *(δηλαδή* $f \circ f^{-1} = id_{f(X)}$*).*

Έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση.

Σε κάθε $A \subseteq X$ αντιστοιχούμε την **εικόνα** του A στο Y, που είναι το σύνολο

$$f(A) \equiv \{y \in Y : \text{ υπάρχει } x \in A \text{ ώστε } f(x) = y\} \equiv \{f(x) \in Y : x \in A\}.$$

Σε κάθε $B \subseteq Y$ αντιστοιχούμε την **αντίστροφη εικόνα** του B στο X, που είναι το σύνολο

$$f^{-1}(B) \equiv \{x \in X : f(x) \in B\}$$

(Σημείωσε ότι το $f^{-1}(B)$ είναι ένα υποσύνολο του X, δεν είναι εν γένει η εικόνα του B μέσω κάποιας συνάρτησης[2].)

Πρόταση 4.3 *Έστω* $f : X \to Y$ *μια συνάρτηση.*

(i) Αν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$ *τότε* $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

(ii) Αν A_1, A_2 *είναι υποσύνολα του* X *τότε* $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(iii) Αν A_1, A_2 *είναι υποσύνολα του* X *τότε* $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. *Ισότητα ισχύει όταν η* f *είναι 1-1, αλλά όχι εν γένει.*

(iv) Αν $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$ *τότε* $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

(v) Αν B_1, B_2 *είναι υποσύνολα του* Y *τότε* $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(vi) Αν B_1, B_2 *είναι υποσύνολα του* Y *τότε* $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(vii) Αν $B \subseteq Y$ *τότε* $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

[2] Αν βέβαια η f είναι 1-1 *και* $B \subseteq f(X)$, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι η εικόνα του B μέσω της συνάρτησης f^{-1}

(viii) *Αν $A \subseteq X$ τότε $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Ισότητα ισχύει όταν η f είναι 1-1, αλλά όχι εν γένει.*

(ix) *Αν $B \subseteq Y$ τότε $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Ισότητα ισχύει όταν η f είναι επί, αλλά όχι εν γένει.*

Παραδείγματα 4.4 *Για το (iii), πάρε π.χ. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ και $A_1 = [-1, 0]$, $A_2 = [0, 2]$.*
Για το (viii), πάρε $A = [-\frac{1}{2}, 1]$ οπότε $f(A) = [0, 1]$ και $f^{-1}(f(A)) = [-1, 1] \neq A$.
Για το (ix), αν $B = [-4, 1]$ τότε $f^{-1}(B) = [-1, 1]$ άρα $f(f^{-1}(B)) = [0, 1] \neq B$.

Ορισμός 4.2 *Αν $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : X \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις τότε ορίζουμε τις συναρτήσεις*

- *$f + g : X \to \mathbb{R}$ όπου $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in X$.*
- *$f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ όπου $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ για κάθε $x \in X$.*
- *Ειδικότερα αν $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την συνάρτηση $\lambda f : X \to \mathbb{R}$ από τη σχέση $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ για κάθε $x \in X$.*
- *Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$ ορίζουμε την $\dfrac{f}{g} : X \to \mathbb{R}$ από τη σχέση $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in X$.*
- *Αν $c \in \mathbb{R}$, η **σταθερή συνάρτηση** $\mathbf{c} : X \to \mathbb{R}$ ορίζεται από τη σχέση $\mathbf{c}(x) = c$ για κάθε $x \in X$.*
- *Ειδικότερα η **μηδενική συνάρτηση** $\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}$ ορίζεται από τη σχέση $\mathbf{0}(x) = 0$ για κάθε $x \in X$.*

Αν $f : X \to \mathbb{R}$ και $g : X \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις, θα λέμε ότι

$$f \leq g \quad \text{αν} \quad f(x) \leq g(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in X.$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση αυτή είναι σχέση μερικής (και όχι ολικής) διάταξης. Δηλαδή μπορεί να μην ισχύει ούτε η $f \leq g$ ούτε η $g \leq f$. Για παράδειγμα αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και $g(x) = x^3$ έχουμε $f(\frac{1}{2}) \geq g(\frac{1}{2})$ ενώ $f(2) \leq g(2)$.

Ορισμός 4.3 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

(i) *Η f λέγεται* ***αύξουσα*** *αν:* $x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

(ii) *Η f λέγεται* ***γνησίως αύξουσα*** *αν:* $x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

(iii) *Η f λέγεται* ***φθίνουσα*** *αν:* $x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

(iv) *Η f λέγεται* ***γνησίως φθίνουσα*** *αν:* $x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

(v) *Η f λέγεται* ***μονότονη*** *αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.*

(vi) *Η f λέγεται* ***γνησίως μονότονη*** *αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.*

(vii) *Η f λέγεται* ***άνω φραγμένη*** *αν το $f(X)$ είναι άνω φραγμένο σύνολο, αν δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in X$ να ισχύει $f(x) \leq M$.*

(viii) *Η f λέγεται* ***κάτω φραγμένη*** *αν το $f(X)$ είναι κάτω φραγμένο σύνολο, αν δηλαδή υπάρχει $L \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in X$ να ισχύει $f(x) \geq L$.*

(ix) *Η f λέγεται* ***φραγμένη*** *αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, ισοδύναμα αν υπάρχει $K \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in X$ να ισχύει $|f(x)| \leq K$.*

Πρόταση 4.5 *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη συνάρτηση. Τότε*
(ι) *Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f(X) \to \mathbb{R}$ υπάρχει.*
(ιι) *Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα αν και μόνον αν η f είναι γνησίως αύξουσα.*
(ιιι) *f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα αν και μόνον αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.*

4.1 Εκθετικές Συναρτήσεις

Έστω $a > 0$. Στόχος αυτής της παραγράφου είναι να ορίσουμε κατάλληλα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έναν πραγματικό αριθμό a^x ώστε να εξακολουθούν να ισχύουν οι ιδιότητες των δυνάμεων που γνωρίζουμε όταν ο x είναι ακέραιος.

(1) Έστω $x \in \mathbb{N}$. Για $x = 0$, θέτουμε $a^x = 1$. Για $x > 0$, θέτουμε $a^x = a \cdot a \ldots a$ (x φορές). Παρατηρούμε ότι $a^{n+m} = a^n a^m$ όταν $n, m \in \mathbb{N}$.

(2) Έστω $x \in \mathbb{Z}$, $x < 0$. Θέτουμε τότε $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$ και παρατηρούμε ότι η σχέση $a^{n+m} = a^n a^m$ εξακολουθεί να ισχύει όταν $n, m \in \mathbb{Z}$.

(3) Έστω $x = \frac{1}{n}$ όπου $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Τότε θέτουμε[3] $a^x = \sqrt[n]{a}$.

[3] Ξέρουμε ότι για κάθε θετικό αριθμό a υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός b με την ιδιότητα $b^n = a$· γράφουμε $b = \sqrt[n]{a}$.

(4) Αν $x = \dfrac{m}{n}$, όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ είναι τυχών ρητός, θέτουμε $a^x = (\sqrt[n]{a})^m$.

Παρατηρούμε εδώ ότι

$$\text{Αν} \quad \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}, \ \text{τότε} \quad (\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n_1]{a})^{m_1}$$

(*Απόδειξη: Άσκηση*). Έτσι ο ορισμός του a^x εξαρτάται μόνον από τον ρητό x κι όχι από τον τρόπο γραφής του ως κλάσματος.

Επίσης παρατηρούμε ότι η σχέση $a^{n+m} = a^n a^m$ ισχύει και για ρητούς εκθέτες:

$$\text{Αν} \ \ p, q \in \mathbb{Q}, \ \ \text{τότε} \quad a^{p+q} = a^p a^q. \tag{1}$$

(*Απόδειξη: Άσκηση*).

Έχουμε τώρα ορίσει μια απεικόνιση

$$f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : q \to a^q$$

η οποία (λόγω της (1)) ικανοποιεί τη σχέση

$$\text{Αν} \ \ p, q \in \mathbb{Q}, \ \ \text{τότε} \quad f_a(p+q) = f_a(p) f_a(q). \tag{2}$$

Το πρόβλημα τώρα είναι να *επεκτείνουμε* τη συνάρτηση αυτή από το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$, να ορίσουμε δηλαδή μια απεικόνιση

$$g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε

$$g_a(q) = a^q \qquad \text{όταν ο } q \text{ είναι ρητός.}$$

Θα επιτύχουμε την επέκταση αυτή αξιοποιώντας την *πυκνότητα του* $\mathbb{Q}$ *στο* $\mathbb{R}$.

Ας παρατηρήσουμε ότι η περίπτωση $0 < a < 1$ ανάγεται στην περίπτωση $a > 1$, εφόσον $a^q = \dfrac{1}{b^q}$ όπου $b = 1/a$. Επίσης, αν $a = 1$ τότε $a^q = 1$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, οπότε ορίζουμε $g_a(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αρκεί λοιπόν να περιορισθούμε στην περίπτωση $a > 1$.

Παρατήρηση 4.6 *Αν $a > 1$, συνάρτηση f_a είναι γνησίως αύξουσα.*

Απόδειξη Εφόσον $a > 1$, για κάθε θετικό ρητό r έχουμε [4] $f_a(r) = a^r > 1$. Συνεπώς αν p, q είναι ρητοί και $p > q$ τότε θέτοντας $r = p - q > 0$ και χρησιμοποιώντας την σχέση (2) έχουμε

$$f_a(p) = f_a(r + q) = f_a(r)f_a(q) > f_a(q). \qquad \square$$

Η επιθυμητή επέκταση θα στηριχθεί στο επόμενο Λήμμα, που αποτελεί γενίκευση της γνωστής Πρότασης $\lim_n a^{1/n} = 1$. Σταθεροποιούμε στο εξής έναν πραγματικό αριθμό $a > 1$.

Λήμμα 4.7 *Αν (q_n) είναι ακολουθία ρητών με $q_n \to 0$, τότε το όριο $\lim_n a^{q_n}$ υπάρχει και ισούται με 1.*

Απόδειξη Επειδή $-|q_n| \leq q_n \leq |q_n|$ και η f_a είναι αύξουσα, έχουμε

$$\frac{1}{a^{|q_n|}} = a^{-|q_n|} \leq a^{q_n} \leq a^{|q_n|}$$

συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $a^{|q_n|} \to 1$.

Αν $q_n \neq 0$ και $|q_n| < 1$ τότε $\dfrac{1}{|q_n|} > 1$ οπότε το ακέραιο μέρος $m_n = \left[\dfrac{1}{|q_n|}\right]$ είναι ένας φυσικός αριθμός διαφορετικός από το 0:

$$0 < m_n \leq \frac{1}{|q_n|} < m_n + 1 \qquad \text{άρα} \quad 0 < \frac{1}{m_n + 1} < |q_n| \leq \frac{1}{m_n}. \tag{3}$$

Έχουμε λοιπόν, αφού η f_a είναι αύξουσα,

$$1 \leq a^{|q_n|} \leq a^{\frac{1}{m_n}} \tag{4}$$

οπότε, θέτοντας $d_n = a^{\frac{1}{m_n}} - 1 \geq 0$ βρίσκουμε

$$a = (1 + d_n)^{m_n} \geq 1 + m_n d_n > m_n d_n$$

άρα (διωνυμικό ανάπτυγμα ή ανισότητα Bernoulli)

$$0 \leq \frac{d_n}{a} < \frac{1}{m_n}.$$

[4] Αν $q = m/n > 0$ τότε $a > 1 \Rightarrow a^m > 1 \Rightarrow (a^m)^{1/n} > 1$ (διότι αν $(a^m)^{1/n} \leq 1$ τότε θα είχαμε $a^m \leq 1$).

Έστω τώρα $\epsilon > 0$ και $\epsilon < 1$. Αφού $q_n \to 0$, υπάρχει n_o ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|q_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Τότε, αν μεν $q_n = 0$ έχουμε $a^{q_n} = 1$ άρα $\frac{d_n}{a} = 0 < \epsilon$, ενώ αν $q_n \neq 0$ τότε από την (3) (αφού $|q_n| < \epsilon < 1$) έχουμε $\dfrac{1}{m_n + 1} < \dfrac{\epsilon}{2}$ άρα [5] $\dfrac{d_n}{a} < \dfrac{1}{m_n} < \epsilon$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\dfrac{d_n}{a} \to 0$, οπότε $a^{\frac{1}{m_n}} \to 1$ άρα $a^{|q_n|} \to 1$ από την (4).

Πρόταση 4.8 *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν (p_n) και (p'_n) είναι ακολουθίες ρητών που συγκλίνουν και οι δύο στο x, τότε*

(i) οι ακολουθίες (a^{p_n}) και $(a^{p'_n})$ συγκλίνουν και

(ii) $\lim\limits_n a^{p_n} = \lim\limits_n a^{p'_n}$.

Απόδειξη Είναι γνωστό ότι υπάρχει *αύξουσα* ακολουθία (r_n) από ρητούς ώστε $r_n \to x$.

Εφόσον η f_a είναι αύξουσα, η ακολουθία (a^{r_n}) είναι αύξουσα.

Ισχυρίζομαι ότι είναι άνω φραγμένη. Πράγματι, αν πάρουμε έναν οποιονδήποτε ρητό $q \geq x$, τότε $r_n \leq q$ άρα $a^{r_n} \leq a^q$ για κάθε n.

Έπεται λοιπόν ότι η ακολουθία (a^{r_n}) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό, έστω θ.

Θα δείξω ότι *για κάθε* ακολουθία (p_n) ρητών που συγκλίνει στο x, η ακολουθία (a^{p_n}) συγκλίνει, και μάλιστα στο ίδιο θ.

Πράγματι, θέτω $q_n = p_n - r_n$ και παρατηρώ ότι η (q_n) συγκλίνει στο $x - x = 0$. Επομένως από το προηγούμενο Λήμμα έπεται ότι η (a^{q_n}) συγκλίνει στο 1. Χρησιμοποιώντας τώρα την (1) έχουμε

$$a^{p_n} = a^{p_n - r_n} a^{r_n} \to 1\theta = \theta. \qquad \square$$

[5] $m_n + 1 > \frac{1}{|q_n|} > \frac{2}{\epsilon}$ άρα $m_n > \frac{2-\epsilon}{\epsilon} > \frac{1}{\epsilon}$