2 Η Πληρότητα του $\mathbb{R}$

Ορισμός 2.1 *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$.*

- *Ο a λέγεται **ένα άνω φράγμα** του A αν κάθε $x \in A$ ικανοποιεί $x \leq a$. Το A λέγεται **άνω φραγμένο** αν έχει κάποιο άνω φράγμα.*
- *Ο a λέγεται **ένα κάτω φράγμα** του A αν κάθε $x \in A$ ικανοποιεί $x \geq a$. Το A λέγεται **κάτω φραγμένο** αν έχει κάποιο κάτω φράγμα.*
- *Το A λέγεται **φραγμένο** αν είναι και άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο.*

Παρατηρήσεις 2.1 (ι) Ένας αριθμός m λέγεται **μέγιστο**[1] στοιχείο του A (γράφουμε $m = \max A$) αν το m *ανήκει στο A και είναι είναι άνω φράγμα* του A. Αν το A έχει μέγιστο στοιχείο, τότε είναι άνω φραγμένο. Αλλά ένα σύνολο μπορεί να είναι άνω φραγμένο χωρίς να έχει μέγιστο στοιχείο, π.χ. το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$.

(ιι) Το A είναι φραγμένο αν και μόνον αν υπάρχει $c \geq 0$ ώστε $|x| \leq c$ για κάθε $x \in A$.

(ιιι) Αν ο a είναι ένα άνω φράγμα του A, τότε κάθε $b \geq a$ είναι επίσης ένα άνω φράγμα του A.

Ορισμός 2.2 *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Ο a λέγεται **ελάχιστο άνω φράγμα (supremum)** του A αν είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματα του A. Δηλαδή*

- *(ι) Ο a είναι ένα άνω φράγμα του A και*
- *(ιι) Κάθε άνω φράγμα b του A ικανοποιεί $b \geq a$.*

Γράφουμε $a = \sup A$.

Ορισμός 2.3 *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R}$. Ο b λέγεται **μέγιστο κάτω φράγμα (infimum)** του A αν είναι το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματα του A.*

Γράφουμε $b = \inf A$.

[1] Ένας αριθμός λ λέγεται **ελάχιστο** στοιχείο του A (γράφουμε $\lambda = \min A$) αν $\lambda \in A$ και είναι κάτω φράγμα του A.

Παρατηρήσεις 2.2 **(α)** Το ελάχιστο άνω φράγμα $\sup A$ ενός συνόλου A, αν υπάρχει, είναι μοναδικό. Το ίδιο και το $\inf A$.

(β) Ένα μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ μπορεί να έχει ή να μην έχει μέγιστο στοιχείο. Αν το A έχει μέγιστο στοιχείο, έστω m, τότε βέβαια (το $\sup A$ υπάρχει και) $m = \sup A$. Εν γένει όμως το $\sup A$ δεν ανήκει κατ'ανάγκην στο A. Για παράδειγμα το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 2\}$ έχει supremum, το 2.

Το κενό σύνολο $\emptyset$ δεν έχει supremum, γιατί κάθε αριθμός είναι άνω φράγμα του. Πράγματι, αν ένας αριθμός a δεν ήταν άνω φράγμα του $\emptyset$, θα έπρεπε να υπάρχει $x \in \emptyset$ ώστε $x > a$. Αλλά το $\emptyset$ δεν έχει στοιχεία!

Το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ είναι άνω φραγμένο, παραδείγματος χάριν από το 3. Πράγματι, κάθε $x \in A$ ικανοποιεί $x \leq 3$ (γιατί, αν υπήρχε $x \in A$ με $x > 3$ τότε θα είχαμε $x^2 > 3^2 = 9 > 2$). Για τον ίδιο λόγο, κάθε πραγματικός αριθμός $b \geq 0$ με $b^2 > 2$ είναι άνω φράγμα του A, παραδείγματος χάριν το $1,5$ (γιατί $(1,5)^2 = 2,25 > 2$, το $1,42$ (γιατί $(1,42)^2 = 2,0164 > 2$), και ούτω καθεξής.Υπάρχει όμως **ελάχιστο** άνω φράγμα;

Διαισθητικά, φαίνεται ότι η απάντηση είναι καταφατική. Αυτό όμως **δεν μπορεί να αποδειχθεί** μόνον από τις αλγεβρικές ιδιότητες Π1 - Π13 των πραγματικών αριθμών. Πρέπει να προστεθεί μια ακόμα, και μάλιστα κρίσιμη, ιδιότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών:

Π 14: Ιδιότητα πληρότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών *Κάθε **μη κενό** και **άνω φραγμένο** υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα (supremum).*

Πρόταση 2.3 *Υπάρχει μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός a ώστε $a^2 = 2$.*

Απόδειξη Έστω
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \ \text{ και } \ x^2 < 2\}.$$

Το A δεν είναι κενό (π.χ. $1 \in A$) και είναι άνω φραγμένο (π.χ. από το 2).

Από την Π14, έχει *ελάχιστο* άνω φράγμα, έστω a. Αφού $1 \in A$, έχω $a \geq 1$.

Θα δείξω ότι $a^2 = 2$, αποκλείοντας τις περιπτώσεις $a^2 > 2$ και $a^2 < 2$:

1) Ας υποθέσουμε ότι $a^2 > 2$. Θα επιλέξω $v \in (0, a)$ ώστε $(a-v)^2 > 2$. Έχουμε

$$(a-v)^2 = a^2 - 2av + v^2 > a^2 - 2av.$$

Συνεπώς αρκεί να επιλέξω το $v \in (0, a)$ ώστε

$$a^2 - 2av \geq 2 \iff a^2 - 2 \geq 2av \overset{a>0}{\iff} \frac{a^2-2}{2a} \geq v\,.$$

Επιλέγω λοιπόν $v = \frac{a^2-2}{2a}$. Εφόσον $a - v < a$, ο αριθμός a–v δεν είναι άνω φράγμα του A. Επομένως υπάρχει $x \in A$ με $x > a - v$. Αλλά $a - v = a - \dfrac{a}{2} + \dfrac{2}{a} > \dfrac{a}{2} > 0$, οπότε $x^2 > (a-v)^2$. Αφού $(a-v)^2 > 2$, έχουμε $x^2 > 2$, άτοπο, διότι $x \in A$.

2) Ας υποθέσουμε ότι $a^2 < 2$. Θα βρώ κάποιο $u > 0$ ώστε $(a+u)^2 < 2$. Μπορεί μάλιστα να βρεθεί τέτοιο με $0 < u < 1$. Πράγματι, έχουμε

$$(a+u)^2 = a^2 + 2au + u^2 = a^2 + u(2a+u) < a^2 + u(2a+1)$$

αν $u < 1$. Συνεπώς αρκεί να λύσω την ανισότητα

$$a^2 + u(2a+1) \leq 2 \iff u(2a+1) \leq 2 - a^2 \overset{2a+1>0}{\iff} u \leq \frac{2-a^2}{2a+1}\,.$$

Αν λοιπόν επιλέξω έναν θετικό αριθμό u με $u < \dfrac{2-a^2}{2a+1}$, τότε θα έχω $u < 1$ (διότι $\dfrac{2-a^2}{2a+1} < \dfrac{2}{2a+1} \leq \dfrac{2}{3} < 1$ αφού $a \geq 1$) και επομένως

$$(a+u)^2 < a^2 + u(2a+1) \leq 2\,.$$

Επομένως ο αριθμός $a + u$ ανήκει στο A και είναι μεγαλύτερος από το a, που όμως είναι άνω φράγμα του A, άτοπο.

Αποδείξαμε λοιπόν την ύπαρξη. Η μοναδικότητα είναι εύκολη. $\square$

Πρόταση 2.4 *Δεν υπάρχει ρητός αριθμός b ώστε $b^2 = 2$.*

Απόδειξη Έστω $b = \frac{m}{n}$ όπου $m, n \in \mathbb{N}$. Μπορώ να υποθέσω ότι οι m, n δεν είναι και οι δύο άρτιοι (κάνοντας τις αναγκαίες απλοποιήσεις). Αν $b^2 = 2$, τότε $m^2 = 2n^2$, οπότε ο m^2 είναι άρτιος. Τότε όμως και ο m είναι άρτιος[2]. Επομένως

[2] γιατί αν ήταν περιττός, έστω $m = 2k+1$, τότε ο $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ θα ήταν περιττός

$m = 2r$ όπου $r \in \mathbb{N}$. Τότε όμως η σχέση $m^2 = 2n^2$ δίνει $4r^2 = 2n^2$ πράγμα που σημαίνει ότι ο $n^2 = 2r^2$ είναι άρτιος, άρα και ο n είναι άρτιος, άτοπο. $\square$

Συνεπώς (α) υπάρχουν άρρητοι αριθμοί

(β) η ιδιότητα της πληρότητας δεν ισχύει στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι

Πρόταση 2.5 (Ύπαρξη n-οστής ρίζας) *Αν $\rho \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, υπάρχει μοναδικός $a \geq 0$ ώστε $a^n = \rho$.*

Άσκηση 2.6 *Αν $B = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ αποδείξτε προσεκτικά ότι το B έχει ελάχιστο άνω φράγμα b με $b^2 = 2$.*

Παρατήρηση 2.7 Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Το a είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A *αν και μόνον αν*

για κάθε $\epsilon > 0$

(ι) *κάθε* $x \in A$ ικανοποιεί $x < a + \epsilon$

και

(ιι) *υπάρχει τουλάχιστον ένα* $y \in A$ ώστε $a - \epsilon < y$.

Απόδειξη Έστω ότι $a = \sup A$. Θεωρώ ένα $\epsilon > 0$ (τυχαίο). Το a είναι άνω φράγμα του A και συνεπώς για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leq a$, άρα $x < a + \epsilon$. Επίσης το $a - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A άρα μπορούμε να βρούμε $y \in A$ ώστε $a - \epsilon < y$ (αν δεν υπήρχε τέτοιο y, τότε κάθε $x \in A$ θα ικανοποιούσε $x \leq a - \epsilon$, οπότε το $a - \epsilon$ θα ήταν άνω φράγμα του A).

Έστω αντίστροφα ότι το a ικανοποιεί τις (ι) και (ιι) για κάθε θετικό αριθμό ϵ. Τότε από την (ι) συμπεραίνουμε ότι το a είναι άνω φράγμα του A, γιατί αν δεν ήταν θα υπήρχε $x \in A$ ώστε $a < x$ και τότε η (ι) δεν θα ήταν αληθής π.χ. για $\epsilon = \frac{x-a}{2}$. Η (ιι) λέει ότι κανένας αριθμός $a - \epsilon$ γνήσια μικρότερος του a δεν μπορεί να είναι άνω φράγμα του A, επομένως το a είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. $\square$

Παρατήρηση 2.8 Η προηγούμενη παρατήρηση χρησιμοποιείται συχνά με την ακόλουθη απλούστερη μορφή:

Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$ ένα άνω φράγμα του. Τότε:

Το a είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A *αν και μόνον αν*
για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $a - \epsilon < x$.

Μια εφαρμογή της Παρατήρησης αυτής είναι και η ακόλουθη:

Παρατήρηση 2.9 Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο ακεραίων αριθμών έχει μέγιστο στοιχείο.

Απόδειξη Έστω $A \subseteq \mathbb{Z}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Από την ιδιότητα της πληρότητας του $\mathbb{R}$, υπάρχει το $s = \sup A \in \mathbb{R}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $s \in A$.

Εφαρμόζοντας την Παρατήρηση 2.8 για $\epsilon = 1$, βρίσκουμε $x \in A$ ώστε $s - 1 < x \leq s$. Αν $s \notin A$, τότε $x < s$ οπότε το x δεν είναι άνω φράγμα του A, άρα υπάρχει $y \in A$ ώστε $x < y < s$. Τότε όμως θα έχουμε $s-1 < x < y < s$, οπότε $0 < y - x < 1$, που είναι αδύνατο αφού οι x και y είναι ακέραιοι. $\square$

Παρατήρηση 2.10 Κάθε μη κενό σύνολο B φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο[3].

Απόδειξη Το σύνολο $-B = \{-b : b \in B\}$ αποτελείται από ακέραιους αριθμούς που δεν υπερβαίνουν το 0, δηλαδή το 0 είναι άνω φράγμα του $-B$. Από την προηγούμενη Παρατήρηση, το $-B$ έχει μέγιστο στοιχείο, άρα το B έχει ελάχιστο στοιχείο. $\square$

Πρόταση 2.11 (Αρχιμήδεια ιδιότητα του συνόλου $\mathbb{N}$) *Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο.*

Απόδειξη (α) Αν το $\mathbb{N}$ ήταν άνω φραγμένο, από την προηγούμενη Παρατήρηση θα είχε μέγιστο στοιχείο, έστω n_o. Αυτό όμως αποκλείεται, καθώς $n_o + 1 \in \mathbb{N}$ και $n_o + 1 > n_o$.

(β) (Χωρίς χρήση της 2.9) Αν το $\mathbb{N}$ ήταν άνω φραγμένο, από την ιδιότητα της πληρότητας (!) θα υπήρχε το ελάχιστο άνω φράγμα του, έστω $a \in \mathbb{R}$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα είχαμε $n+1 \leq a$ (αφού το a είναι μεγαλύτερο ή ίσο από κάθε φυσικό αριθμό, άρα και από τον $n+1$). Αλλά τότε $n \leq a - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε ο αριθμός $a - 1$ θα ήταν άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, πράγμα που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το a είναι το *ελάχιστο άνω φράγμα του* $\mathbb{N}$. $\square$

Πόρισμα 2.12 *Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών δεν είναι κάτω φραγμένο (βεβαίως ούτε άνω φραγμένο).*

[3] Η ιδιότητα αυτή του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ονομάζεται *αρχή του ελαχίστου* και μπορεί να χρησιμοποιηθεί π.χ. για να αποδειχθεί η μέθοδος της επαγωγής.

Απόδειξη Αν το b ήταν ένα κάτω φράγμα του $\mathbb{Z}$, τότε το $-b$ θα ήταν ένα άνω φράγμα του $\mathbb{Z}$, άρα και του $\mathbb{N}$.

Πόρισμα 2.13 *Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{1}{n} < \epsilon$.*

Απόδειξη Αλλιώς θα υπήρχε $\epsilon > 0$ ώστε $\frac{1}{n} \geq \epsilon$, δηλαδή $\frac{1}{\epsilon} \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε το $\mathbb{N}$ θα ήταν άνω φραγμένο (από το $\frac{1}{\epsilon}$).

Πόρισμα 2.14 *Αν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $na > b$.*

Απόδειξη Ο αριθμός $\frac{b}{a}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. $\square$

Ανάμεσα σε δυο *ρητούς* αριθμούς υπάρχει πάντα ρητός, π.χ. ο $\frac{a+b}{2}$. Τι γίνεται αν οι a, b δεν είναι και οι δύο ρητοί;

Πρόταση 2.15 (Πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$) *Ανάμεσα σε δυο (διαφορετικούς) πραγματικούς αριθμούς υπάρχει πάντα ρητός: Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$ υπάρχει $c \in \mathbb{Q}$ ώστε $a < c < b$.*

Απόδειξη Υποθέτω ότι $0 < a < b$. (Οι άλλες περιπτώσεις αφήνονται στον αναγνώστη). Θέλω να βρώ $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε $a < \frac{m}{n} < b$, ισοδύναμα $na < m < nb$.

Επιλέγω και σταθεροποιώ n ώστε $\frac{1}{n} < b - a$ (τέτοιο n υπάρχει από την Πρόταση 2.13).

Το σύνολο $\{k \in \mathbb{N} : \frac{k}{n} < b\}$ δεν είναι κενό (περιέχει το 0) και είναι άνω φραγμένο (από το nb), άρα έχει μέγιστο στοιχείο (Παρατήρηση 2.9), έστω m. Το m είναι το μεγαλύτερο k που ικανοποιεί την ανισότητα $\frac{k}{n} < b$, άρα το $m + 1$ δεν την ικανοποιεί. Έχουμε λοιπόν

$$\frac{m}{n} < b \leq \frac{m+1}{n}.$$

Επίσης όμως, αφού $\frac{1}{n} < b - a$,

$$\frac{m}{n} = \frac{m+1}{n} - \frac{1}{n} \geq b - \frac{1}{n} > b - (b - a) = a$$

άρα $\dfrac{m}{n} > a$. $\square$

Παρατήρηση 2.16 Ανάμεσα σε δυο (διαφορετικούς) πραγματικούς αριθμούς υπάρχει πάντα άρρητος.

Απόδειξη Πράγματι, αν $a < b$ τότε $\sqrt{2}a < \sqrt{2}b$. Από την Πρόταση 2.15 υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $\sqrt{2}a < q < \sqrt{2}b$, οπότε $a < \frac{q}{\sqrt{2}} < b$. Εφόσον, όπως έχουμε δείξει, ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (Πρόταση 2.4) και ο q ρητός, ο $\frac{q}{\sqrt{2}}$ είναι άρρητος.[4] $\square$

Πρόταση 2.17 (Ύπαρξη ακέραιου μέρους) *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $n \leq x < n+1$. Ο αριθμός αυτός λέγεται **ακέραιο μέρος του** x και συμβολίζεται $[x]$.*

Απόδειξη *Ύπαρξη* Το $\mathbb{Z}$ δεν είναι κάτω φραγμένο, επομένως υπάρχει $y \in \mathbb{Z}$ ώστε $y \leq x$. Δηλαδή το σύνολο $X = \{y \in \mathbb{Z} : y \leq x\}$ είναι μη κενό. Επίσης το X είναι άνω φραγμένο (από το x). Από την Παρατήρηση 2.9 συμπεραίνουμε ότι το X έχει μέγιστο στοιχείο, έστω $[x]$. Αφού $[x] \in X$ και $[x]+1 \notin X$ έχουμε $[x] \leq x < [x]+1$.

Μοναδικότητα Αν ένας $m \in \mathbb{Z}$ ικανοποιεί $m \leq x < m+1$ τότε

$$\begin{aligned} [x] \leq x \ \text{ και } \ x < m+1 &\implies [x] < m+1 \\ m \leq x \ \text{ και } \ x < [x]+1 &\implies m < [x]+1, \\ \text{άρα} \quad & -1 < [x]-m < 1 \end{aligned}$$

και συνεπώς $[x]-m=0$, αφού ο $[x]-m$ είναι ακέραιος. $\square$

[4] Αν ο $\frac{q}{\sqrt{2}} = x$ ήταν ρητός, τότε (αφού $q, x \in \mathbb{Q}$) ρητός θα ήταν και ο $\frac{q}{x} = \sqrt{2}$, άτοπο.

Συμβολισμοί Είναι χρήσιμο να επεκτείνουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με δυο ακόμα στοιχεία (που *δεν είναι* πραγματικοί αριθμοί) το $+\infty$ και το $-\infty$, σχηματίζοντας έτσι το σύνολο των *επεκτεταμένων πραγματικών αριθμών*.

Επεκτείνουμε τη διάταξη από το $\mathbb{R}$ ορίζοντας $-\infty < a$ και $a < +\infty$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, θέτουμε

$$\begin{aligned}
\alpha + (+\infty) &= (+\infty) + \alpha = \alpha - (-\infty) = +\infty \\
\alpha + (-\infty) &= (-\infty) + \alpha = \alpha - (+\infty) = -\infty \\
\text{Αν } \alpha > 0, \text{ τότε } \alpha(+\infty) &= (+\infty)\alpha = +\infty \\
\text{και } \alpha(-\infty) &= (-\infty)\alpha = -\infty \\
\text{Αν } \alpha < 0, \text{ τότε } \alpha(+\infty) &= (+\infty)\alpha = -\infty \\
\text{και } \alpha(-\infty) &= (-\infty)\alpha = +\infty \\
(+\infty) + (+\infty) &= +\infty\,,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\
(+\infty) \cdot (+\infty) &= +\infty\,,\ (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \\
(+\infty) \cdot (-\infty) &= (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty\,.
\end{aligned}$$

Δεν ορίζονται οι παραστάσεις

$$\begin{aligned}
&(+\infty) + (-\infty)\,,\ (-\infty) + (+\infty)\,, \\
&0 \cdot (+\infty)\,,\ (+\infty) \cdot 0\,,\ 0 \cdot (-\infty)\,,\ (-\infty) \cdot 0 \\
&\frac{+\infty}{+\infty}\,,\ \frac{+\infty}{-\infty}\,,\ \frac{-\infty}{+\infty}\,,\ \frac{-\infty}{-\infty}\,.
\end{aligned}$$

Με τους συμβολισμούς αυτούς, αν ένα μη κενό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ δεν είναι άνω φραγμένο (οπότε το $\sup A$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$), γράφουμε συχνά $\sup A = +\infty$, κι αν δεν είναι κάτω φραγμένο, γράφουμε $\inf A = -\infty$.