Ασκήσεις Απειροστικού Λογισμού Ι

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2009

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. *Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \leq \sup A$.*

Σωστό. Ο $\sup A$ είναι εξ ορισμού άνω φράγμα του A. Συνεπώς, για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \leq \sup A$.

2. *Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ο $x \in \mathbb{R}$ είναι άνω φράγμα του A αν και μόνο αν $\sup A \leq x$.*

Σωστό. Αν ο x είναι άνω φράγμα του A τότε $\sup A \leq x$ από τον ορισμό του $\sup A$: ο $\sup A$ είναι το *μικρότερο* άνω φράγμα του A. Αντίστροφα, αν $\sup A \leq x$ τότε για κάθε $a \in A$ έχουμε $a \leq \sup A \leq x$, δηλαδή ο x είναι άνω φράγμα του A.

3. *Αν το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $\sup A \in A$.*

Λάθος. Το $A = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, όμως $\sup A = 1 \notin A$.

4. *Αν A είναι ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ τότε $\sup A \in A$.*

Σωστό. Έστω A ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$. Από το αξίωμα της πληρότητας, υπάρχει το $a = \sup A \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $a \in A$: από τον χαρακτηρισμό του supremum, υπάρχει $x \in A$ ώστε $a - 1 < x$. Αν $a \notin A$, τότε $x < a$. Αυτό σημαίνει ότι ο x δεν είναι άνω φράγμα του A, οπότε, εφαρμόζοντας πάλι τον χαρακτηρισμό του supremum, βρίσκουμε $y \in A$ ώστε $a-1 < x < y < a$. Έπεται ότι $0 < y - x < 1$. Αυτό είναι άτοπο, διότι οι x και y είναι ακέραιοι.

5. *Αν* $a = \sup A$ *και* $\varepsilon > 0$, *τότε υπάρχει* $x \in A$ *με* $a - \varepsilon < x \leq a$.

Σωστό. Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, από τον χαρακτηρισμό του supremum, υπάρχει $x \in A$ ώστε $a - \varepsilon < x$. Από την άλλη πλευρά, ο a είναι άνω φράγμα του A και $x \in A$. Συνεπώς, $x \leq a$.

6. *Αν* $a = \sup A$ *και* $\varepsilon > 0$, *τότε υπάρχει* $x \in A$ *με* $a - \varepsilon < x < a$.

Λάθος. Πάρτε, για παράδειγμα, $A = \{1, 2\}$. Τότε, $\sup A = 2$. Αν όμως πάρουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$, τότε δεν υπάρχει $x \in A$ που να ικανοποιεί την $\frac{3}{2} < x < 2$.

7. *Αν το* A *είναι μη κενό και* $\sup A - \inf A = 1$ *τότε υπάρχουν* $x, y \in A$ *ώστε* $x - y = 1$.

Λάθος. Πάρτε, για παράδειγμα, $A = (0, 1)$. Τότε, $\sup A - \inf A = 1 - 0 = 1$. Αν όμως $x, y \in (0, 1)$ τότε $0 < x < 1$ και $-1 < -y < 0$, άρα $-1 < x - y < 1$. Δηλαδή, για κάθε $x, y \in (0, 1)$ έχουμε $x - y \neq 1$.

8. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *με* $x < y$ *υπάρχουν άπειροι το πλήθος* $r \in \mathbb{Q}$ *που ικανοποιούν την* $x < r < y$.

Σωστό. Έστω A το σύνολο όλων των $r \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιούν την $x < r < y$ (γνωρίζετε ότι το A είναι μη κενό). Ας υποθέσουμε ότι το A έχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία, τα $r_1 < \cdots < r_m$. Έχουμε $x < r_1$, άρα υπάρχει ρητός r_* που ικανοποιεί την $x < r_* < r_1$. Όμως τότε, $x < r_* < y$ και $r_* \notin \{r_1, \ldots, r_m\}$ (άτοπο).

Ασκήσεις – Ομάδα Α΄

1. *Δείξτε ότι τα παρακάτω ισχύουν στο* $\mathbb{R}$:

(α) *Αν* $x < y + \varepsilon$ *για κάθε* $\varepsilon > 0$, *τότε* $x \leq y$.

(β) *Αν* $x \leq y + \varepsilon$ *για κάθε* $\varepsilon > 0$, *τότε* $x \leq y$.

(γ) *Αν* $|x - y| \leq \varepsilon$ *για κάθε* $\varepsilon > 0$, *τότε* $x = y$.

(δ) *Αν* $a < x < b$ *και* $a < y < b$, *τότε* $|x - y| < b - a$.

Υπόδειξη. (α) *Απαγωγή σε άτοπο.* Υποθέτουμε ότι $y < x$. Τότε, επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{x-y}{2} > 0$ έχουμε

$$x - (y + \varepsilon) = x - y - \frac{x - y}{2} = \frac{x - y}{2} > 0,$$

δηλαδή υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $x > y + \varepsilon$. Άτοπο.

(β) Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο: υποθέτουμε ότι $y < x$. Τότε, επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{x-y}{2} > 0$ έχουμε

$$x - (y + \varepsilon) = x - y - \frac{x - y}{2} = \frac{x - y}{2} > 0,$$

δηλαδή υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $x > y + \varepsilon$. Άτοπο.

(γ) Θυμηθείτε ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $b \geq 0$, τότε $|a| \leq b$ αν και μόνο αν $-b \leq a \leq b$. Από την υπόθεση, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύουν οι

$$x \leq y + \varepsilon \quad \text{και} \quad y \leq x + \varepsilon.$$

Από το (β) έπεται ότι $x \leq y$ και $y \leq x$. Άρα, $x = y$.

(δ) Αφού $a < x < b$ και $-b < -y < -a$, έχουμε $-(b-a) < x - y < b - a$. Άρα, $|x - y| < b - a$.

2. (α) *Αν $|a - b| < \varepsilon$, τότε υπάρχει x ώστε*

$$|a - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ και } |b - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(β) *Ισχύει το αντίστροφο;*

(γ) *Έστω ότι $a < b < a + \varepsilon$. Βρείτε όλους τους $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις $|a - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|b - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.*

Υπόδειξη. (α) Παίρνουμε σαν x το μέσο του διαστήματος $[a, b]$:

$$x = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Τότε,

$$|a - x| = |b - x| = \frac{|a - b|}{2} < \varepsilon.$$

(β) Ισχύει. Αν $|a - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|b - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ τότε, από την τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή, έχουμε

$$|a - b| \leq |a - x| + |x - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(γ) Το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την $|a - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ είναι το $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Ομοίως, το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την $|b - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ είναι το $\left(b - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Άρα, θέλουμε να βρούμε την τομή τους

$$(a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2) \cap (b - \varepsilon/2, b + \varepsilon/2).$$

Λόγω της $b < a + \varepsilon$ έχουμε $b - \frac{\varepsilon}{2} < a + \frac{\varepsilon}{2}$. Συνεπώς,

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < b - \frac{\varepsilon}{2} < a + \frac{\varepsilon}{2} < b + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται ότι $(a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2) \cap (b - \varepsilon/2, b + \varepsilon/2) = (b - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2)$.

3. *Να δειχθεί με επαγωγή ότι ο αριθμός $n^5 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. Με επαγωγή. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέστε ότι για κάποιον $m \in \mathbb{N}$ ο $m^5 - m$ είναι πολλαπλάσιο του 5 και γράψτε

$$(m+1)^5 - (m+1) = (m^5 - m) + 5m^4 + 10m^3 + 10m^2 + 5m.$$

4. *Εξετάστε για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού n ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:*
(i) $2^n > n^3$, (ii) $2^n > n^2$, (iii) $2^n > n$, (iv) $n! > 2^n$, (v) $2^{n-1} \leq n^2$.

Υπόδειξη. (ii) Μερικές δοκιμές θα σας πείσουν ότι η $2^n > n^2$ ισχύει για $n = 1$, δεν ισχύει για $n = 2, 3, 4$ και (μάλλον) ισχύει για κάθε $n \geq 5$. Δείξτε με επαγωγή ότι η $2^n > n^2$ ισχύει για κάθε $n \geq 5$: για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι η $2^m > m^2$ ισχύει για κάποιον $m \geq 5$. Τότε,

$$2^{m+1} > 2m^2 > (m+1)^2$$

αν ισχύει η ανισότητα

$$1 + 2m < m^2.$$

Όμως, αφού $m \geq 5$, έχουμε

$$1 + 2m < m + 2m = 3m < m^2.$$

(iv) Δείξτε με επαγωγή ότι $n! > 2^n$ για κάθε $n \geq 4$. Ελέγξτε ότι $n! \leq 2^n$ αν $n = 1, 2, 3$.

(v) Δείξτε με επαγωγή ότι $2^{n-1} > n^2$ για κάθε $n \geq 7$. Ελέγξτε ότι $2^{n-1} \leq n^2$ αν $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

5. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι*

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Αν $0 < a < b$, δείξτε ότι

$$na^{n-1} \leq \frac{b^n - a^n}{b - a} \leq nb^{n-1}.$$

Υπόδειξη. Με επαγωγή. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέστε ότι

$$a^m - b^m = (a-b) \left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} \right)$$

για κάποιον $m \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\begin{aligned} a^{m+1} - b^{m+1} &= (a-b)a^m + b(a^m - b^m) \\ &= (a-b)a^m + (a-b)b \left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (a-b)\left(a^m + \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} b\right) \\ &= (a-b)\left(a^m + \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k}\right) \\ &= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{m} a^k b^{m-k}\right). \end{aligned}$$

Αν $0 < a < b$, τότε $a^{n-1} \leq a^k b^{n-1-k} \leq b^{n-1}$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Άρα,

$$na^{n-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \frac{b^n - a^n}{b-a} \leq nb^{n-1}.$$

6. *Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν $a > 1$, τότε $a^n > a$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.*

(β) *Αν $a > 1$ και $m, n \in \mathbb{N}$, τότε $a^m < a^n$ αν και μόνο αν $m < n$.*

(γ) *Αν $0 < a < 1$, τότε $a^n < a$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.*

(δ) *Αν $0 < a < 1$ και $m, n \in \mathbb{N}$, τότε $a^m < a^n$ αν και μόνο αν $m > n$.*

Υπόδειξη. (α) Αφού $a > 1$ και $a > 0$, έχουμε $a \cdot a > 1 \cdot a$. Δηλαδή, $a^2 > a$. Υποθέτουμε ότι $a^m > a$ για κάποιον $m \geq 2$. Αφού $a > 1$ και $a^m > 0$, παίρνουμε διαδοχικά

$$a^{m+1} = a^m \cdot a > a^m \cdot 1 = a^m > a.$$

Από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι $a^n > a$ για κάθε $n \geq 2$.

(β) Δείξτε πρώτα με επαγωγή ότι $a^k > 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε, αν $m < n$ έχουμε $n - m \in \mathbb{N}$ και αυτό σημαίνει ότι $a^{n-m} > 1$, δηλαδή $\frac{a^n}{a^m} > 1$. Άρα, $a^n > a^m$. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, παρατηρήστε ότι αν $m \geq n$ τότε, όπως πριν, $a^n \leq a^m$. Συνεπώς, αν $a^m < a^n$ πρέπει να ισχύει $m < n$.

(γ) Αφού $a < 1$ και $a > 0$, έχουμε $a \cdot a < 1 \cdot a$. Δηλαδή, $a^2 < a$. Υποθέτουμε ότι $a^m < a$ για κάποιον $m \geq 2$. Αφού $a < 1$ και $a^m > 0$, παίρνουμε διαδοχικά

$$a^{m+1} = a^m \cdot a < a^m \cdot 1 = a^m < a.$$

Από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι $a^n < a$ για κάθε $n \geq 2$.

(δ) Δείξτε πρώτα με επαγωγή ότι $a^k < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε, αν $m < n$ έχουμε $n - m \in \mathbb{N}$ και αυτό σημαίνει ότι $a^{n-m} < 1$, δηλαδή $\frac{a^n}{a^m} < 1$. Άρα, $a^n < a^m$. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, παρατηρήστε ότι αν $m \leq n$ τότε, όπως πριν, $a^n \leq a^m$. Συνεπώς, αν $a^m < a^n$ πρέπει να ισχύει $m > n$.

7. *Έστω $a \in \mathbb{R}$ και έστω $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν* $a \geq -1$, *τότε* $(1+a)^n \geq 1+na$.

(β) *Αν* $0 < a < 1/n$, *τότε* $(1+a)^n < 1/(1-na)$.

(γ) *Αν* $0 \leq a \leq 1$, *τότε*

$$1 - na \leq (1-a)^n \leq \frac{1}{1+na}.$$

Υπόδειξη. (α) (ανισότητα του Bernoulli). Για $n = 1$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα: $1 + a = 1 + a$. Δείχνουμε το επαγωγικό βήμα:

Υποθέτουμε ότι $(1+a)^m \geq 1+ma$. Αφού $1+a \geq 0$, έχουμε $(1+a)(1+a)^m \geq (1+a)(1+ma)$. Άρα,

$$(1+a)^{m+1} \geq (1+a)(1+ma) = 1 + (m+1)a + ma^2 \geq 1 + (m+1)a.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $ma^2 \geq 0$.

(β) Για το επαγωγικό βήμα, παρατηρήστε πρώτα ότι αν $0 < a < \frac{1}{m+1}$ τότε έχουμε και $0 < a < \frac{1}{m}$. Από την επαγωγική υπόθεση,

$$(1+a)^{m+1}(1-(m+1)a) = (1+a)(1-(m+1)a)(1+a)^m < \frac{(1+a)(1-(m+1)a)}{1-ma}.$$

Όμως,

$$(1+a)(1-(m+1)a) = 1 + a - (m+1)a - (m+1)a^2 = 1 - ma - (m+1)a^2 < 1 - ma.$$

Έπεται ότι

$$(1+a)^{m+1}(1-(m+1)a) < 1.$$

(γ) Για την αριστερή ανισότητα, παρατηρήστε ότι $-a \geq -1$. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το (α) με τον $-a$ στη θέση του a:

$$(1-a)^n = (1+(-a))^n \geq 1 + n(-a) = 1 - na.$$

Για τη δεξιά ανισότητα: αν $a = 1$ η ανισότητα ισχύει διότι, τότε, $(1-a)^n = 0$. Αν $0 \leq a < 1$ έχουμε $\frac{1}{1-a} > 1 + a$ (εξηγήστε γιατί), οπότε

$$\frac{1}{(1-a)^n} = \left(\frac{1}{1-a}\right)^n > (1+a)^n \geq 1 + na$$

από το (α). Έπεται ότι $(1-a)^n \leq \frac{1}{1+na}$.

8. *Έστω* $a \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι:*

(α) *Αν* $-1 < a < 0$, *τότε* $(1+a)^n \leq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(β) *Αν* $a > 0$, *τότε* $(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Ισοδύναμα, δείξτε ότι αν $0 < x < 1$, τότε $(1-x)^n \leq 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με επαγωγή. Αν $n = 1$ τότε ισχύει σαν ισότητα.

Υποθέστε ότι $(1-x)^m \leq 1 - mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
(1-x)^{m+1} &= (1-x)^m(1-x) \\
&\leq \left(1 - mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2\right)(1-x) \\
&= 1-(m+1)x + \left[\frac{m(m-1)}{2} + m\right]x^2 - \frac{m(m-1)}{2}x^3 \\
&< 1-(m+1)x + \frac{(m+1)m}{2}x^2,
\end{aligned}$$

αφού $\frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{(m+1)m}{2}$ και $x > 0$.

(β) Αν $n = 1$, η ανισότητα ισχύει σαν ισότητα. Αν $n \geq 2$, παρατηρήστε ότι από το διωνυμικό ανάπτυγμα,

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \geq 1 + na + \binom{n}{2}a^2 = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

Πού χρησιμοποιήθηκε η υπόθεση ότι $a > 0$;

9. *Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι ανισότητες*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{και} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Υπόδειξη. Για την πρώτη ανισότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \\
&\iff \frac{n+1}{n+2} < \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\
&\iff 1 - \frac{1}{n+2} < \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Αρκεί λοιπόν να ελέγξετε ότι

$$\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}.$$

10. (α) *Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz: αν $a_1, \ldots, a_n$ και $b_1, \ldots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

(β) *Δείξτε την ανισότητα του Minkowski: αν $a_1, \ldots, a_n$ και $b_1, \ldots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. (α) Η πιο φυσιολογική απόδειξη είναι με επαγωγή: παρατηρήστε πρώτα ότι αρκεί να δείξουμε την ανισότητα στην περίπτωση που $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ (εξηγήστε γιατί).

$n = 2$: Ελέγξτε ότι για κάθε $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Επαγωγικό βήμα. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για οποιεσδήποτε δύο k–άδες πραγματικών αριθμών, $k = 2, \ldots, m$. Έστω $a_1, \ldots, a_{m+1}$ και $b_1, \ldots, b_{m+1}$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{m} a_k b_k + a_{m+1} b_{m+1} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2\right)^{1/2} + a_{m+1} b_{m+1}.\end{aligned}$$

Αν ορίσουμε $x = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right)^{1/2}$ και $y = \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2\right)^{1/2}$, τότε (από το βήμα $n = 2$) έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2\right)^{1/2} + a_{m+1} b_{m+1} &= xy + a_{m+1} b_{m+1} \\ &\leq (x^2 + a_{m+1}^2)^{1/2} (y^2 + b_{m+1}^2)^{1/2} \\ &= \left(a_1^2 + \cdots + a_m^2 + a_{m+1}^2\right)^{1/2} \left(b_1^2 + \cdots + b_m^2 + b_{m+1}^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k b_k \leq \left(a_1^2 + \cdots + a_m^2 + a_{m+1}^2\right)^{1/2} \left(b_1^2 + \cdots + b_m^2 + b_{m+1}^2\right)^{1/2}.$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει το επαγωγικό βήμα.

(β) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz, γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k(a_k+b_k)+\sum_{k=1}^n b_k(a_k+b_k)\\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2\right)^{1/2}\\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2}\right]\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Έπεται το ζητούμενο (εξηγήστε γιατί).

11. (Ταυτότητα του Lagrange) *Αν* $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ *και* $b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$, *τότε*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^n (a_kb_j-a_jb_k)^2.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Lagrange δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)=\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)=\sum_{k,j=1}^n a_k^2b_j^2$$

και, όμοια,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)=\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)=\sum_{k,j=1}^n a_j^2b_k^2.$$

Επίσης,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)\left(\sum_{j=1}^n a_jb_j\right)=\sum_{k,j=1}^n a_kb_ja_jb_k.$$

Άρα, το αριστερό μέλος ισούται (εξηγήστε γιατί) με

$$\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^n (a_k^2b_j^2-2a_kb_ja_jb_k+a_j^2b_k^2)=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^n (a_kb_j-a_jb_k)^2.$$

Η ανισότητα Cauchy–Schwarz προκύπτει άμεσα.

12. (Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου) *Αν* $x_1, \ldots, x_n > 0$, *τότε*

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^n .$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Επίσης, αν $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, *τότε*

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \right)^n .$$

Υπόδειξη. Πρώτος τρόπος. Δείχνουμε πρώτα επαγωγικά ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αν $x_1, \ldots, x_{2^k}$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\sqrt[2^k]{x_1 \cdots x_{2^k}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}.$$

Για $k = 1$ πρέπει να ελέγξουμε ότι αν $x_1, x_2 > 0$ τότε $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$. Αυτή η ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν $4x_1 x_2 \leq (x_1 + x_2)^2$, η οποία ισχύει διότι $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

Υποθέτουμε ότι αν $y_1, \ldots, y_{2^m}$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\sqrt[2^m]{y_1 \cdots y_{2^m}} \leq \frac{y_1 + \cdots + y_{2^m}}{2^m}.$$

Έστω $x_1, \ldots, x_{2^m}, x_{2^m+1}, \ldots, x_{2^{m+1}} > 0$. Τότε, εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση για τους $x_1, \ldots, x_{2^m} > 0$ και $x_{2^m+1}, \ldots, x_{2^{m+1}} > 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\sqrt[2^{m+1}]{x_1 \cdots x_{2^m} x_{2^m+1} \cdots x_{2^{m+1}}} &= \sqrt{\sqrt[2^m]{x_1 \cdots x_{2^m}} \cdot \sqrt[2^m]{x_{2^m+1} \cdots x_{2^{m+1}}}} \\
&\leq \frac{\sqrt[2^m]{x_1 \cdots x_{2^m}} + \sqrt[2^m]{x_{2^m+1} \cdots x_{2^{m+1}}}}{2} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^m}}{2^m} + \frac{x_{2^m+1} + \cdots + x_{2^{m+1}}}{2^m} \right) \\
&= \frac{x_1 + \cdots + x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}.
\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν δείξει το ζητούμενο αν το πλήθος N των αριθμών είναι $N = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $x_1, \ldots, x_n > 0$. Υπάρχει $N = 2^k > n$ (εξηγήστε γιατί). Θεωρούμε τη N–άδα $x_1, \ldots, x_n, \alpha, \ldots, \alpha$, όπου πήραμε $N - n$ φορές τον θετικό αριθμό $\alpha = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου γι' αυτή τη N–άδα:

$$\sqrt[N]{x_1 \cdots x_n \cdot \alpha^{N-n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n + (N-n)\alpha}{N}.$$

Αφού $x_1 \cdots x_n = \alpha^n$, η ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\alpha = \sqrt[N]{\alpha^n \cdot \alpha^{N-n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n + (N-n)\alpha}{N},$$

δηλαδή

$$N\alpha \leq (x_1 + \cdots + x_n) + (N-n)\alpha \Longrightarrow n\alpha \leq x_1 + \cdots + x_n.$$

Συνεπώς,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \alpha \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Δεύτερος τρόπος. Θέτουμε $\alpha = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ και ορίζουμε $b_k = \frac{x_k}{\alpha}$, $k = 1, \ldots, n$. Παρατηρούμε ότι οι b_k είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με γινόμενο

$$b_1 \cdots b_n = \frac{x_1}{\alpha} \cdots \frac{x_n}{\alpha} = \frac{x_1 \cdots x_n}{\alpha^n} = 1.$$

Επίσης, η ζητούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$b_1 + \cdots + b_n \geq n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε το εξής:

> Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν $b_1, \ldots, b_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με γινόμενο $b_1 \cdots b_n = 1$, τότε $b_1 + \cdots + b_n \geq n$.

Δείξτε την με επαγωγή ως προς το πλήθος των b_k: αν $n = 1$ τότε έχουμε έναν μόνο αριθμό, τον $b_1 = 1$. Συνεπώς, η ανισότητα είναι τετριμμένη: $1 \geq 1$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε m–άδα θετικών αριθμών $y_1, \ldots, y_m$ με γινόμενο $y_1 \cdots y_m = 1$ ισχύει η ανισότητα

$$y_1 + \cdots + y_m \geq m,$$

και δείχνουμε ότι αν $b_1, \cdots, b_{m+1}$ είναι $(m+1)$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με γινόμενο $b_1 \cdots b_{m+1} = 1$ τότε

$$b_1 + \cdots + b_{m+1} \geq m + 1.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{m+1}$. Παρατηρούμε ότι, αν $b_1 = b_2 = \cdots = b_{m+1} = 1$ τότε η ανισότητα ισχύει σαν ισότητα. Αν όχι, αναγκαστικά έχουμε $b_1 < 1 < b_{m+1}$ (εξηγήστε γιατί).

Θεωρούμε την m-άδα θετικών αριθμών

$$y_1 = b_1 b_{m+1}\,,\ y_2 = b_2, \ldots,\ y_m = b_m.$$

Αφού $y_1 \cdots y_m = b_1 \cdots b_{m+1} = 1$, από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε

$$(b_1 b_{m+1}) + b_2 + \cdots + b_m = y_1 + \cdots + y_m \geq m.$$

Όμως, από την $b_1 < 1 < b_{m+1}$ έπεται ότι $(b_{m+1}-1)(1-b_1) > 0$ δηλαδή $b_1 + b_{m+1} > 1 + b_{m+1}b_1$. Άρα,

$$b_1 + b_{m+1} + b_2 + \cdots + b_m > 1 + b_1 b_{m+1} + b_2 + \cdots + b_m \geq 1 + m.$$

Έχουμε λοιπόν δείξει το επαγωγικό βήμα.

Αν οι $x_1, \cdots, x_n$ δεν είναι όλοι ίσοι, τότε η απόδειξη που προηγήθηκε δείχνει ότι η ανισότητα είναι γνήσια (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή: στην ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x_1 = \cdots = x_n$.

Για την ανισότητα

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \right)^n$$

εφαρμόστε την ανισότητα που μόλις δείξαμε για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}$.

13. *Δείξτε ότι κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα.*

Υπόδειξη. Έστω A μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{-x : x \in A\}$. Παρατηρούμε πρώτα ότι το B είναι μη κενό: υπάρχει $x \in A$ και τότε $-x \in B$. Επίσης, το B άνω φραγμένο: το A είναι κάτω φραγμένο και αν θεωρήσουμε τυχόν κάτω φράγμα t του A μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι ο $-t$ είναι άνω φράγμα του B (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα $s = \sup B$ του B. Όπως πριν, αφού ο s είναι άνω φράγμα του B, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ο $-s$ είναι κάτω φράγμα του A. Αν $y > -s$, τότε $-y < s$. Αφού $s = \sup B$, υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε $-y < b$. Τότε, $-b \in A$ και $-b < y$. Δηλαδή, ο $-s$ είναι κάτω φράγμα του A και αν $y > -s$ τότε ο y δεν είναι κάτω φράγμα του A. Έπεται ότι $-s = \inf A$.

Άλλος τρόπος: Ορίζουμε $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ κάτω φράγμα του } A\}$. Δείξτε ότι το Γ είναι μη κενό και άνω φραγμένο (οποιοδήποτε στοιχείο του A είναι ένα άνω φράγμα του Γ). Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα $s = \sup \Gamma$ του Γ. Δείξτε ότι ο s είναι κάτω φράγμα του A. Τότε, ο s είναι το *μέγιστο στοιχείο* του Γ, δηλαδή το μέγιστο κάτω φράγμα του A.

Για να δείξετε ότι ο $s = \sup \Gamma$ είναι κάτω φράγμα του A, πρέπει να δείξετε ότι το τυχόν $a \in A$ ικανοποιεί την $\sup \Gamma \leq a$. Αρκεί να δείξετε ότι ο a είναι άνω φράγμα του Γ (εξηγήστε γιατί). Όμως, αν $x \in \Gamma$ τότε $x \leq a$ (από τον ορισμό του Γ, ο x είναι κάτω φράγμα του A).

14. *Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $a_0 \in A$ με την ιδιότητα: για κάθε $a \in A$, $a \leq a_0$. Δείξτε ότι $a_0 = \sup A$. Με άλλα λόγια, αν το A έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι το supremum του A.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε $a \in A$ έχουμε $a \leq a_0$. Άρα, το A είναι άνω φραγμένο και ο a_0 είναι ένα άνω φράγμα του. Έπεται ότι το $\sup A$ υπάρχει, και $\sup A \leq a_0$.

Από την άλλη πλευρά, αφού $a_0 \in A$ και ο $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, έχουμε $a_0 \leq \sup A$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $a_0 = \sup A$.

15. *Έστω A, B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αν $\sup A = \inf B$, δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον χαρακτηρισμό του sup μπορούμε να βρούμε $a \in A$ ώστε $a > \sup A - \varepsilon/2$. Από τον χαρακτηρισμό του inf μπορούμε να βρούμε $b \in B$ ώστε $b < \inf B + \varepsilon/2$. Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες με την υπόθεση, παίρνουμε

$$b < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \frac{\varepsilon}{2} < a + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = a + \varepsilon.$$

Δηλαδή, βρήκαμε $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

16. *Έστω A μη κενό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\inf A = \sup A$. Τι συμπεραίνετε για το A;*

Υπόδειξη. Αν το A έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε $\inf A < \sup B$: υπάρχουν $x, y \in A$ με $x < y$, οπότε $\inf A \leq x < y \leq \sup A$. Αν το A είναι μονοσύνολο, δηλαδή $A = \{a\}$ για κάποιον $a \in \mathbb{R}$, τότε $\inf A = \sup A = a$ (γιατί;).

Άρα, $\inf A = \sup A$ αν και μόνο αν το A είναι μονοσύνολο.

17. (α) *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Βρείτε το supremum και το infimum του συνόλου $(a, b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας.*
(β) *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$. Δείξτε ότι*

$$x = y \Longleftrightarrow A_x = A_y.$$

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $A = (a, b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}$. Από τον ορισμό του A έχουμε $x < b$ για κάθε $x \in A$. Άρα, $\sup A \leq b$. Παρατηρήστε ότι $\sup A > a$. Υποθέτουμε ότι $\sup A < b$. Από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $\sup A < q < b$. Τότε $a < q < b$, δηλαδή $q \in A$. Αυτό είναι άτοπο, λόγω της $\sup A < q$. Άρα, $\sup A = b$.

Με ανάλογο επιχείρημα δείξτε ότι $\inf A = a$.

(β) Ας υποθέσουμε ότι $x \neq y$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x < y$. Υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με την ιδιότητα $x < q < y$. Τότε, $q \in A_y$ και $q \notin A_x$. Άρα, $A_x \neq A_y$.

Αν $x = y$, είναι φανερό ότι: για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ ισχύει $q < x \Longleftrightarrow q < y$. Άρα, $A_x = A_y$.

18. *Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq B$. Δείξτε ότι*

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Υπόδειξη. Δείχνουμε την $\inf B \leq \inf A$. Αρκεί να δείξουμε ότι ο $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του A. Όμως, αν $x \in A$ τότε $x \in B$ (διότι $A \subseteq B$), άρα $\inf B \leq x$.

19. *Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $A\cup B$ είναι φραγμένο και*

$$\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\},\qquad \inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\}.$$

Μπορούμε να πούμε κάτι ανάλογο για το $\sup(A\cap B)$ ή το $\inf(A\cap B)$;

Υπόδειξη. (α) Από την Άσκηση 18 έχουμε $\sup(A\cup B)\geq \sup A$ και $\sup(A\cup B)\geq \sup B$. Άρα, $\sup(A\cup B)\geq \max\{\sup A,\sup B\}$.

Για την αντίστροφη ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι ο $M:=\max\{\sup A,\sup B\}$ είναι άνω φράγμα του $A\cup B$. Έστω $x\in A\cup B$. Τότε, ο x ανήκει σε τουλάχιστον ένα από τα A ή B. Αν $x\in A$ τότε $x\leq \sup A\leq M$ και αν $x\in B$ τότε $x\leq \sup B\leq M$.

(β) Ισχύει η ανισότητα $\sup(A\cap B)\leq \min\{\sup A,\sup B\}$. Μπορεί όμως να είναι γνήσια. Ένα παράδειγμα δίνουν τα $A=\{1,2\}$ και $B=\{1,3\}$.

20. *Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\sup A\leq \inf B$ αν και μόνο αν για κάθε $a\in A$ και για κάθε $b\in B$ ισχύει $a\leq b$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\sup A\leq \inf B$. Τότε, για κάθε $a\in A$ και για κάθε $b\in B$ ισχύει $a\leq \sup A\leq \inf B\leq b$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $a\in A$ και για κάθε $b\in B$ ισχύει $a\leq b$. Θα δείξουμε ότι $\sup A\leq \inf B$.

Πρώτος τρόπος: Για να δείξουμε ότι $\sup A\leq \inf B$, αρκεί να δείξουμε ότι ο $\inf B$ είναι άνω φράγμα του A. Έστω $a\in A$. Από την υπόθεση, για κάθε $b\in B$ ισχύει $a\leq b$. Άρα, ο a είναι κάτω φράγμα του B. Συνεπώς, $a\leq \inf B$. Το $a\in A$ ήταν τυχόν, άρα ο $\inf B$ είναι άνω φράγμα του A.

Δεύτερος τρόπος: Ας υποθέσουμε ότι $\inf B<\sup A$. Υπάρχει $\varepsilon>0$ με την ιδιότητα $\inf B+\varepsilon<\sup A-\varepsilon$ (εξηγήστε γιατί). Από τον χαρακτηρισμό του infimum, υπάρχει $b\in B$ που ικανοποιεί την $b<\inf B+\varepsilon$ και υπάρχει $a\in A$ που ικανοποιεί την $\sup A-\varepsilon<a$. Τότε, $b<\inf B+\varepsilon<\sup A-\varepsilon<a$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

21. *Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a\in A$ υπάρχει $b\in B$ ώστε*

$$a\leq b.$$

Δείξτε ότι $\sup A\leq \sup B$.

Υπόδειξη. Πρώτος τρόπος: Για να δείξουμε ότι $\sup A\leq \sup B$, αρκεί να δείξουμε ότι ο $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A. Έστω $a\in A$. Από την υπόθεση, υπάρχει $b\in B$ ώστε

$$a\leq b\leq \sup B.$$

Το $a\in A$ ήταν τυχόν, άρα ο $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A.

Δεύτερος τρόπος: Ας υποθέσουμε ότι $\sup A>\sup B$. Υπάρχει $\varepsilon>0$ με την ιδιότητα $\sup A-\varepsilon>\sup B$ (γιατί;). Από τον χαρακτηρισμό του supremum, υπάρχει $a\in A$ που ικανοποιεί την $a>\sup A-\varepsilon$. Τότε, για κάθε $b\in B$ έχουμε

$$b\leq \sup B<\sup A-\varepsilon<a.$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

22. *Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα* max, min, sup *και* inf *των παρακάτω συνόλων:*

(α) $A = \{x > 0 : 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$, $C = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.

(β) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 0, x^2 + x - 1 < 0\}$, $E = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$, $F = \{x \in \mathbb{Q} : (x-1)(x+\sqrt{2}) < 0\}$.

(γ) $G = \{5 + \frac{6}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{7 - 8n : n \in \mathbb{N}\}$.

Υπόδειξη.

(i) Για το A παρατηρήστε ότι $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq \sqrt{3}\} = (1, \sqrt{3}]$. Άρα, $\max A = \sup A = \sqrt{3}$. Το $\inf A$ είναι το 1, το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(ii) Ανάλογα, $B = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x \leq \sqrt{3}\}$. Εδώ, $\sup B = \sqrt{3}$, $\inf B = 1$, το B δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο.

(iii) Το C έχει ελάχιστο στοιχείο το 0 και μέγιστο στοιχείο το $\frac{1}{2}$. Συνεπώς, $\inf C = 0$ και $\sup C = \frac{1}{2}$.

(iv) Ισχύει $x^2 + x - 1 < 0$ αν και μόνο αν $-\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Έπεται ότι $D = \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$. Το D δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο, $\inf D = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sup D = 0$.

(v) Γράφουμε το E στη μορφή $E = \left\{\frac{1}{2k-1} - 1 : k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2k} + 1 : k \in \mathbb{N}\right\}$. Εξηγήστε τα παρακάτω: $\sup E = \max E = \frac{3}{2}$, $\inf E = -1$, το E δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(vi) Έχουμε $F = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x < 1\}$. Το F δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο, $\inf F = -\sqrt{2}$, $\sup F = 1$.

(vii) Τέλος, το G δεν είναι κάτω φραγμένο και έχει μέγιστο στοιχείο το $\max G = \sup G = 11$ (εξηγήστε γιατί).

23. *Βρείτε το supremum και το infimum των συνόλων*

$$A = \left\{1 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \quad , \quad B = \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Υπόδειξη. (α) Γράψτε το A στη μορφή

$$A = \left\{2 - \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2k-1} : k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Για κάθε $a \in A$ ισχύει $0 < a < 2$. Αν $y > 0$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2k-1} < y$. Αν $y < 2$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $2 - \frac{1}{2k} > y$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $\inf A = 0$ και $\sup A = 2$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε ότι το A δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο.

(β) Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Άρα, $\sup B = \max B = \frac{5}{6}$. Για κάθε $b \in B$ ισχύει $b > 0$. Επίσης, αν $y > 0$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n} < y.$$

Έπεται ότι $\inf B = 0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε ότι το B δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

24. *Δείξτε ότι το σύνολο*

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n m}{n+m} : m, n = 1, 2, \ldots \right\}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$ *και* $\inf A$. *Εξετάστε αν το* A *έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο.*

Υπόδειξη. Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\left| \frac{(-1)^n m}{n+m} \right| = \frac{m}{n+m} < 1$. Συνεπώς, $A \subseteq (-1, 1)$. Δείξτε ότι $\sup A = 1$ και $\inf A = -1$. Τέλος, δείξτε ότι το A δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο.

Ασκήσεις – Ομάδα Β′

25. *Δείξτε ότι οι αριθμοί* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *και* $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ *είναι άρρητοι.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Τότε, $5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \in \mathbb{Q}$, άρα $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$ όπου $m, n \in \mathbb{N}$ με μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα. Από την $m^2 = 6n^2$ βλέπουμε ότι ο m είναι άρτιος, άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $m = 2k$. Αντικαθιστώντας στην $m^2 = 6n^2$ παίρνουμε $2k^2 = 3n^2$. Αναγκαστικά, ο n είναι κι αυτός άρτιος. Αυτό είναι άτοπο, αφού ο 2 είναι κοινός διαιρέτης των m και n.

(β) Υποθέτουμε ότι $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = x \in \mathbb{Q}$. Τότε,

$$5 + 2\sqrt{6} = x^2 + 5 - 2x\sqrt{5},$$

άρα $\sqrt{6} + x\sqrt{5} = y \in \mathbb{Q}$. Υψώνοντας πάλι στο τετράγωνο, βλέπουμε ότι $\sqrt{30} \in \mathbb{Q}$. Μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{30} = \frac{m}{n}$ όπου $m, n \in \mathbb{N}$ με μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα. Από την $m^2 = 30n^2$ βλέπουμε ότι ο m είναι άρτιος, άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $m = 2k$. Αντικαθιστώντας στην $m^2 = 30n^2$ παίρνουμε $2k^2 = 15n^2$. Αναγκαστικά, ο n είναι κι αυτός άρτιος. Αυτό είναι άτοπο, αφού ο 2 είναι κοινός διαιρέτης των m και n.

26. *Δείξτε ότι αν ο φυσικός αριθμός* n *δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, τότε ο* $\sqrt{n}$ *είναι άρρητος.*

Υπόδειξη. Αφού ο n δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $N^2 < n < (N+1)^2$. Υποθέτουμε ότι $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, όπου $p, q \in \mathbb{N}$ και ο q είναι ο μικρότερος δυνατός.

Θέτουμε $q_1 = p - qN = q(\sqrt{n} - N)$ και $p_1 = p(\sqrt{n} - N) = qn - pN$. Τότε, $p_1, q_1 \in \mathbb{N}$ διότι είναι ακέραιοι και θετικοί (αφού $\sqrt{n} - N > 0$) και $q_1 = p - qN < q$ διότι $\frac{p}{q} = \sqrt{n} < N + 1$. Όμως,

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p(\sqrt{n} - N)}{q(\sqrt{n} - N)} = \frac{p}{q} = \sqrt{n},$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $q_1 < q$.

27. *Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι:*

(α) *για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leq b$, και*

(β) *για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.*

Δείξτε ότι $\sup A = \inf B$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $\sup A \leq \inf B$. Σταθεροποιούμε $b \in B$. Αφού $a \leq b$ για κάθε $a \in A$, ο b είναι άνω φράγμα του A, συνεπώς $\sup A \leq b$. Το $b \in B$ ήταν τυχόν, άρα ο $\sup A$ είναι κάτω φράγμα του B. Τώρα, έπεται ότι $\sup A \leq \inf B$.

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρούμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a_\varepsilon \in A$ και $b_\varepsilon \in B$ ώστε $b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon$, συνεπώς

$$\inf B \leq b_\varepsilon < a_\varepsilon + \varepsilon \leq \sup A + \varepsilon.$$

Δείξαμε ότι $\inf B < \sup A + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $\inf B \leq \sup A$ (από την Άσκηση 1).

28. *Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a - \varepsilon < b$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\sup A \leq \sup B$. Έστω $a \in A$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ε-χαρακτηρισμό του $\sup B$, υπάρχει $b \in B$ ώστε $\sup B - \varepsilon < b$. Τότε,

$$a - \varepsilon \leq \sup A - \varepsilon \leq \sup B - \varepsilon < b.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a - \varepsilon < b$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τυχόν $a \in A$ και βρίσκουμε $b \in B$ ώστε

$$a < b + \varepsilon \leq \sup B + \varepsilon.$$

Αφού το $a \in A$ ήταν τυχόν, ο $\sup B + \varepsilon$ είναι άνω φράγμα του A, δηλαδή

$$\sup A \leq \sup B + \varepsilon.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $\sup A \leq \sup B$ (από την Άσκηση 1).

29. *Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) *για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a < b$.*

(β) $A \cup B = \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε είτε $A = (-\infty, \gamma)$ και $B = [\gamma, +\infty)$ ή $A = (-\infty, \gamma]$ και $B = (\gamma, +\infty)$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έπεται ότι $A \cap B = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Επίσης, από την Άσκηση 20 έχουμε $\gamma := \sup A \leq \delta := \inf B$. Δικαιολογήστε διαδοχικά τα εξής:

(i) $\gamma = \delta$: αν είχαμε $\gamma < \delta$ τότε ο $\frac{\gamma+\delta}{2}$ δεν θα ανήκε στο $A \cup B$ (εξηγήστε γιατί).

(ii) $(-\infty, \gamma] \supseteq A$ και $[\gamma, \infty) \supseteq B$.

(iii) $(-\infty, \gamma) \subseteq A$ και $(\gamma, \infty) \subseteq B$.

(iv) Ο γ ανήκει σε ακριβώς ένα από τα A ή B.

30. *Έστω $A \subset (0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\inf A = 0$ και ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα $\max$, $\min$, $\sup$ και $\inf$ του συνόλου*

$$B = \left\{ \frac{x}{x+1} \,:\, x \in A \right\}.$$

Υπόδειξη. Αν $y \in B$ τότε $y = \frac{x}{x+1}$ για κάποιο $x \in A$. Αφού $A \subset (0, +\infty)$, βλέπουμε ότι $y > 0$. Άρα, το B είναι κάτω φραγμένο από το 0.

Δείχνουμε ότι $\inf B = 0$ με τον ε χαρακτηρισμό του infimum. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\inf A = 0$, υπάρχει $x \in A$ ώστε $x < \varepsilon$. Τότε, το $y = \frac{x}{x+1} \in B$ και $y = \frac{x}{x+1} < x < \varepsilon$ (είναι $x + 1 > 1$ αφού $x > 0$).

Παρατηρούμε ότι ο 1 είναι άνω φράγμα του B: αν $y \in B$ τότε υπάρχει $x \in A$ ώστε $y = \frac{x}{x+1} < 1$. Δείχνουμε ότι $\sup B = 1$ με τον ε χαρακτηρισμό του supremum. Έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $x \in A$ ώστε $1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 1 - \varepsilon$, δηλαδή $x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Αφού το A δεν είναι άνω φραγμένο, τέτοιο $x \in A$ υπάρχει. Τότε, το $y = \frac{x}{x+1} \in B$ και $y = \frac{x}{x+1} > 1 - \varepsilon$.

Το B δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο: θα έπρεπε να υπάρχει $x > 0$ που να ικανοποιεί την $\frac{x}{x+1} = 0$ ή την $\frac{x}{x+1} = 1$ αντίστοιχα (κάτι που δεν γίνεται).

31. *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ακέραιος $k_n \in \mathbb{Z}$ ώστε $\left| x - \frac{k_n}{\sqrt{n}} \right| < \frac{1}{\sqrt{n}}$.*

Υπόδειξη. Θέτουμε $k_n = [\sqrt{n}x] \in \mathbb{Z}$. Τότε, $k_n \leq \sqrt{n}x < k_n + 1$, άρα

$$0 \leq \sqrt{n}x - k_n < 1 \quad \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} < 0 \leq x - \frac{k_n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Δηλαδή, $\left| x - \frac{k_n}{\sqrt{n}} \right| < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

32. *Έστω* $x \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι: για κάθε* $N \geq 2$ *υπάρχουν ακέραιοι* m *και* n, *με* $0 < n \leq N$, *ώστε* $|nx - m| < \frac{1}{N}$.

Υπόδειξη. Χωρίζουμε το $[0, 1)$ σε N ίσα διαδοχικά διαστήματα $\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right)$, $j = 1, \dots, N$. Για $k = 0, 1, \dots N$ θεωρούμε τους αριθμούς $x_k = kx - [kx] \in [0, 1)$. Αφού το πλήθος των x_k είναι $N + 1$ και το πλήθος των διαστημάτων είναι N, μπορούμε να βρούμε j και $k > s$ ώστε $x_k, x_s \in \left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right)$. Τότε, $|x_k - x_s| < \frac{1}{N}$, δηλαδή $|(k - s)x - ([kx] - [sx])| < \frac{1}{N}$. Θέτοντας $n = k - s$ και $m = [kx] - [sx]$ παίρνουμε το ζητούμενο.

33. *Έστω* $a_1, \dots, a_n > 0$. *Δείξτε ότι*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Υπόδειξη. Από την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού–αρμονικού μέσου έχουμε

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

34. *Αν* $a > 0$, $b > 0$ *και* $a + b = 1$, *τότε*

$$2\left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2\right] \geq 25.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε πρώτα ότι $1 = (a + b)^2 \geq 4ab$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned} 2\left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2\right] &= (1^2 + 1^2)\left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2\right] \\ &\geq \left(1 \cdot (a + \frac{1}{a}) + 1 \cdot (b + \frac{1}{b})\right)^2 \\ &\geq \big((a + 4b) + (b + 4a)\big)^2 \\ &= 25(a + b)^2 = 25. \end{aligned}$$

35. (α) *Αν* $a_1, \dots, a_n > 0$, *δείξτε ότι*

$$(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + \cdots + a_n.$$

(β) *Αν* $0 < a_1, \dots, a_n < 1$, *τότε*

$$\begin{aligned} 1 - (a_1 + \cdots + a_n) &\leq (1 - a_1) \cdots (1 - a_n) \\ &\leq 1 - (a_1 + \cdots + a_n) + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n). \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Με επαγωγή.

36*. *Αν* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ *και* $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n > 0$, *τότε*

$$\begin{aligned} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} &\leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \\ &\leq \frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{n}. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Μπορείτε να αποδείξετε τις δύο ανισότητες με επαγωγή. Μια πολύ πιό σύντομη απόδειξη είναι η εξής.

Δεξιά ανισότητα: Από την υπόθεση ότι $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ και $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ έπεται (γιατί;) ότι

$$\sum_{k,j=1}^{n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \geq 0.$$

Δηλαδή,

$$(*) \qquad \sum_{k,j=1}^{n} a_kb_k + \sum_{k,j=1}^{n} a_jb_j \geq \sum_{k,j=1}^{n} a_jb_k + \sum_{k,j=1}^{n} a_kb_j.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{k,j=1}^{n} a_kb_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k \right) = n(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n).$$

Όμοια,

$$\sum_{k,j=1}^{n} a_jb_j = n(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n).$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\sum_{k,j=1}^{n} a_jb_k = \sum_{k,j=1}^{n} a_kb_j = (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n).$$

Άρα, η $(*)$ παίρνει τη μορφή

$$2n(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) \geq 2(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n),$$

που είναι η ζητούμενη ανισότητα.

Αριστερή ανισότητα: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$\sum_{k,j=1}^{n} (a_k - a_j)(b_{n-k+1} - b_{n-j+1}) \leq 0.$$

37*. *Έστω $a_1,\ldots,a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Δείξτε ότι υπάρχει $1\leq m\leq n-1$ με την ιδιότητα*
$$\left|\sum_{k=1}^m a_k-\sum_{k=m+1}^n a_k\right|\leq \max\{a_1,\ldots,a_n\}.$$
Υπόδειξη: Θεωρήστε τους αριθμούς
$$b_m=\sum_{k=1}^m a_k-\sum_{k=m+1}^n a_k,\qquad m=1,\ldots,n-1$$
και
$$b_0=-\sum_{k=1}^n a_k\quad,\quad b_n=\sum_{k=1}^n a_k.$$
Δείξτε ότι δύο διαδοχικοί από αυτούς είναι ετερόσημοι.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τους αριθμούς
$$b_m=\sum_{k=1}^m a_k-\sum_{k=m+1}^n a_k,\qquad m=1,\ldots,n-1$$
και
$$b_0=-\sum_{k=1}^n a_k\quad,\quad b_n=\sum_{k=1}^n a_k.$$
Αν $B=\{k:1\leq k\leq n \text{ και } b_k>0\}$, τότε το B είναι μη κενό (εξηγήστε γιατί). Άρα, έχει ελάχιστο στοιχείο: ας το πούμε m_0. Παρατηρήστε ότι $m_0\geq 1$. Αφού ο m_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του B, έχουμε $b_{m_0}>0$ και $b_{m_0-1}\leq 0$. Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι
$$|b_{m_0}|+|b_{m_0-1}|=b_{m_0}-b_{m_0-1}=2a_{m_0}\leq 2\max\{a_1,\ldots,a_n\}.$$
Αυτό δίνει το ζητούμενο (εξηγήστε γιατί).

38. *Έστω A,B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\}$. Δείξτε ότι*
$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B,\qquad \inf(A+B)=\inf A+\inf B.$$

Υπόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

(α) $\inf(A+B)\geq \inf A+\inf B$: αρκεί να δείξουμε ότι ο $\inf A+\inf B$ είναι κάτω φράγμα του $A+B$. Έστω $x\in A+B$. Υπάρχουν $a\in A$ και $b\in B$ ώστε $x=a+b$. Όμως, $a\geq\inf A$ και $b\geq\inf B$. Άρα,
$$x=a+b\geq\inf A+\inf B.$$
Το $x\in A+B$ ήταν τυχόν, άρα ο $\inf A+\inf B$ είναι κάτω φράγμα του $A+B$.

(β) $\inf(A+B) \leq \inf A + \inf B$: αρκεί να δείξουμε ότι ο $\inf(A+B) - \inf B$ είναι κάτω φράγμα του A. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε (τυχόν) $a \in A$ και δείχνουμε ότι

$$\inf(A+B) - a \leq \inf B.$$

Για την τελευταία ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι ο $\inf(A+B) - a$ είναι κάτω φράγμα του B: έστω $b \in B$. Τότε, $a + b \in A + B$. Άρα,

$$\inf(A+B) \leq a + b \Longrightarrow \inf(A+B) - a \leq b.$$

Το $b \in B$ ήταν τυχόν, άρα ο $\inf(A+B) - a$ είναι κάτω φράγμα του B.

Δεύτερος τρόπος: Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον χαρακτηρισμό του supremum και του infimum, υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ που ικανοποιούν τις

$$a < \inf A + \varepsilon \;\text{ και }\; b < \inf B + \varepsilon.$$

Τότε, αφού $a + b \in A + B$,

$$\inf(A+B) \leq a + b < \inf A + \inf B + 2\varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\inf(A+B) \leq \inf A + \inf B$.

39. *Έστω A, B μη κενά, φραγμένα σύνολα θετικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι*

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B, \qquad \inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

Υπόδειξη. Ακολουθήστε τη διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε στην Άσκηση 38.

40. *Έστω A μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $t \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $tA = \{ta : a \in A\}$. Δείξτε ότι*

(α) *αν $t \geq 0$ τότε $\sup(tA) = t \sup A$ και $\inf(tA) = t \inf A$.*

(β) *αν $t < 0$ τότε $\sup(tA) = t \inf A$ και $\inf(tA) = t \sup A$.*

Υπόδειξη. Ακολουθήστε τη διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε στην Άσκηση 38.

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. *Κάθε φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.*

Λάθος. Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει.

2. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Σωστό. Υποθέτουμε ότι $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$\text{αν } n \geq n_0, \text{ τότε } |a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Θέτουμε

$$M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\}$$

και ελέγχουμε ότι $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (διακρίνετε περιπτώσεις: $n \leq n_0$ και $n > n_0$). Άρα, η (a_n) είναι φραγμένη.

3. *Αν (a_n) είναι μια ακολουθία ακεραίων αριθμών, τότε η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι τελικά σταθερή.*

Σωστό. Υποθέτουμε ότι η (a_n) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό a. Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \frac{1}{2}$. Τότε, αν $n \geq n_0$ έχουμε

$$|a_n - a_{n_0}| = |(a_n - a) + (a - a_{n_0})| \leq |a_n - a| + |a - a_{n_0}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Όμως, οι a_n και a_{n_0} είναι ακέραιοι, άρα $a_n = a_{n_0}$. Δηλαδή, η (a_n) είναι τελικά σταθερή: για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $a_n = a_{n_0}$.

Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι απλή: γενικότερα, αν για μια ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά στο $\mathbb{Z}$) υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n = a$, τότε $a_n \to a$ (εξηγήστε, με βάση τον ορισμό του ορίου).

4. *Υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.*

Λάθος. Ας υποθέσουμε ότι (a_n) είναι μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Από την αρχή της καλής διάταξης, έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_m \leq a_n$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $a_{m+1} \in A$ και $a_{m+1} < a_m$.

5. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία άρρητων αριθμών συγκλίνει σε άρρητο αριθμό.*

Λάθος. Η ακολουθία $a_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ είναι ακολουθία άρρητων αριθμών, όμως $a_n \to 0$ (και ο 0 είναι ρητός).

6. *Κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο κάποιας ακολουθίας άρρητων αριθμών.*

Σωστό. Διακρίνετε περιπτώσεις. Αν ο x είναι άρρητος, μπορείτε να θεωρήσετε τη σταθερή ακολουθία $a_n = x$. Αν ο x είναι ρητός, μπορείτε να θεωρήσετε την ακολουθία $a_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$.

7. *Αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τότε $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.*

Σωστό. Υποθέτουμε πρώτα ότι $a_n \to 0$. Έστω $M > 0$. Αφού $a_n \to 0$, εφαρμόζοντας τον ορισμό με $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$, μπορούμε να βρούμε $n_0 = n_0(\varepsilon) = n_0(M) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $0 < a_n < \frac{1}{M}$. Δηλαδή, υπάρχει $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\frac{1}{a_n} > M$. Έπεται ότι $\frac{1}{a_n} \to +\infty$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο.

8. *Αν $a_n \to a$ τότε η (a_n) είναι μονότονη.*

Λάθος. Η ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει στο 0 αλλά δεν είναι μονότονη.

9. *Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία. Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.*

Σωστό. Έστω $M > 0$. Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{n_0} > M$. Αφού η (a_n) είναι αύξουσα, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n \geq a_{n_0} > M$. Αφού ο $M > 0$ ήταν τυχών, συμπεραίνουμε ότι $a_n \to +\infty$.

10. *Αν η (a_n) είναι φραγμένη και η (b_n) συγκλίνει τότε η (a_nb_n) συγκλίνει.*

Λάθος. Η $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη και η $b_n = 1$ συγκλίνει, όμως η $a_nb_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει.

11. *Αν η $(|a_n|)$ συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.*

Λάθος. Η $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει, όμως η $|a_n| = 1$ συγκλίνει.

12. *Αν $a_n > 0$ και η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.*

Λάθος. Θεωρήστε την ακολουθία (a_n) με $a_{2k} = k$ και $a_{2k-1} = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε, $a_n > 0$ και η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, όμως $a_n \not\to +\infty$ (αν αυτό ίσχυε, θα έπρεπε όλοι τελικά οι όροι της (a_n) να είναι μεγαλύτεροι από 2, το οποίο δεν ισχύει αφού όλοι οι περιττοί όροι της είναι ίσοι με 1).

13. *$a_n \to +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M.*

Λάθος. Χρησιμοποιήστε το παράδειγμα της προηγούμενης ερώτησης για να δείξετε ότι μπορεί να ισχύει η πρόταση «για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M» χωρίς να ισχύει η πρόταση «$a_n \to +\infty$».

Η άλλη κατεύθυνση είναι σωστή: αν $a_n \to +\infty$ τότε (από τον ορισμό) για κάθε $M > 0$ όλοι τελικά οι όροι της (a_n) είναι μεγαλύτεροι από M. Άρα, για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M.

14. *Αν η (a_n) συγκλίνει και $a_{n+2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η (a_n) είναι σταθερή.*

Σωστό. Αν $a_n \to a$ τότε οι ακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στον a (εξηγήστε γιατί). Από την υπόθεση ότι $a_{n+2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, βλέπουμε ότι οι (a_{2k}) και (a_{2k-1}) είναι σταθερές ακολουθίες: υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x = a_1 = a_3 = a_5 = \cdots \quad \text{και} \quad y = a_2 = a_4 = a_6 = \cdots.$$

Από τις $a_{2k-1} \to x$ και $a_{2k} \to y$ έπεται ότι $x = y = a$. Άρα, η (a_n) είναι σταθερή.

Υπενθύμιση από τη θεωρία

1. *Έστω (a_n), (b_n) δύο ακολουθίες με $a_n \to a$ και $b_n \to b$.*

(α) *Αν $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $a \leq b$.*

(β) *Αν $a_n < b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $a < b$;*

(γ) *Αν $m \leq a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $m \leq a \leq M$.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $a > b$. Αν θέσουμε $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ τότε υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει

$$|a_n - a| < \frac{a-b}{2} \Longrightarrow a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

και για κάθε $n \geq n_2$ ισχύει

$$|b_n - b| < \frac{a-b}{2} \Longrightarrow b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$b_n < \frac{a+b}{2} < a_n,$$

το οποίο είναι άτοπο.

(β) Όχι: αν ορίσουμε $a_n = 0$ και $b_n = \frac{1}{n}$, τότε $a_n < b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αλλά $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Θα έχουμε όμως $a \leq b$ (από το πρώτο ερώτημα).

(γ) Θεωρήστε τις σταθερές ακολουθίες $\gamma_n = m$, $\delta_n = M$ και εφαρμόστε το (α).

2. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών.*

(α) *Δείξτε ότι $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $|a_n| \to 0$.*

(β) *Δείξτε ότι αν $a_n \to a \neq 0$ τότε $|a_n| \to |a|$. Ισχύει το αντίστροφο;*

(γ) *Έστω $k \geq 2$. Δείξτε ότι αν $a_n \to a$ τότε $\sqrt[k]{|a_n|} \to \sqrt[k]{|a|}$.*

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να γράψουμε τους δύο ορισμούς:

(i) Έχουμε $a_n \to 0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - 0| < \varepsilon$.

(ii) Έχουμε $|a_n| \to 0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\big| |a_n| - 0 \big| < \varepsilon$.

Παρατηρώντας ότι $|a_n - 0| = \big| |a_n| - 0 \big|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βλέπουμε ότι οι δύο προτάσεις λένε ακριβώς το ίδιο πράγμα.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\big| |a_n| - |a| \big| \leq |a_n - a| < \varepsilon,$$

από την τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα: θεωρήστε την $a_n = (-1)^n$.

(γ) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $a_n \to 0$: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to 0$, εφαρμόζοντας τον ορισμό για τον θετικό αριθμό $\varepsilon_1 = \varepsilon^k$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$0 \leq a_n < \varepsilon^k.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$0 \leq \sqrt[k]{a_n} < \sqrt[k]{\varepsilon^k} = \varepsilon.$$

Άρα, $\sqrt[k]{a_n} \to 0$.

(ii) $a_n \to a > 0$: Θυμηθείτε ότι αν $x, y \geq 0$ τότε

$$|x^k - y^k| = |x - y|(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1}) \geq |x - y|y^{k-1}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την ανισότητα με $x = \sqrt[k]{a_n}$ και $y = \sqrt[k]{a}$ βλέπουμε ότι

$$\left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a} \right| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt[k]{a^{k-1}}}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to 0$, εφαρμόζοντας τον ορισμό για τον θετικό αριθμό $\varepsilon_1 = \sqrt[k]{a^{k-1}} \cdot \varepsilon$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$|a_n - a| < \sqrt[k]{a^{k-1}} \cdot \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a} \right| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt[k]{a^{k-1}}} < \varepsilon.$$

Συνεπώς, $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$.

3. (α) *Έστω $\mu > 1$ και $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $a_{n+1} \geq \mu a_n$ για κάθε n, δείξτε ότι $a_n \to +\infty$.*

(β) *Έστω $0 < \mu < 1$ και (a_n) ακολουθία με την ιδιότητα $|a_{n+1}| \leq \mu |a_n|$ για κάθε n. Δείξτε ότι $a_n \to 0$.*

(γ) *Έστω $a_n > 0$ για κάθε n, και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell > 1$. Δείξτε ότι $a_n \to +\infty$.*

(δ) *Έστω $a_n \neq 0$ για κάθε n, και $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \to \ell < 1$. Δείξτε ότι $a_n \to 0$.*

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $a_2 \geq \mu a_1$, $a_3 \geq \mu^2 a_1$, $a_4 \geq \mu^3 a_1$, και γενικά,

$$a_n \geq \mu^{n-1} a_1 = \frac{a_1}{\mu} \cdot \mu^n.$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^n = +\infty$, έπεται ότι $a_n \to +\infty$.

(β) Έχουμε $|a_2| \leq \mu |a_1|$, $|a_3| \leq \mu^2 |a_1|$, $|a_4| \leq \mu^3 |a_1|$, και γενικά,

$$|a_n| \leq \mu^{n-1} |a_1| = \frac{|a_1|}{\mu} \cdot \mu^n.$$

Αφού $\lim_{n\to\infty} \mu^n = 0$, έπεται ότι $|a_n| \to 0$, άρα $a_n \to 0$.

(γ) Θέτουμε $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$. Αφού $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \ell - \varepsilon = \frac{\ell+1}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι $\theta := \frac{\ell+1}{2} > 1$. Τότε, $a_{n_0+1} > \theta a_{n_0}$, $a_{n_0+2} > \theta^2 a_{n_0}$, $a_{n_0+3} > \theta^3 a_{n_0}$, και γενικά, αν $n > n_0$ ισχύει (εξηγήστε γιατί)

$$a_n > \theta^{n-n_0} a_{n_0} = \frac{a_{n_0}}{\theta^{n_0}} \cdot \theta^n.$$

Αφού $\lim_{n\to\infty} \theta^n = +\infty$, έπεται ότι $a_n \to +\infty$.

(δ) Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$. Αφού $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \ell + \varepsilon = \frac{\ell+1}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι $\rho := \frac{\ell+1}{2} < 1$. Τότε, $|a_{n_0+1}| < \rho|a_{n_0}|$, $|a_{n_0+2}| < \rho^2|a_{n_0}|$, $|a_{n_0+3}| < \rho^3|a_{n_0}|$, και γενικά, αν $n > n_0$ ισχύει (εξηγήστε γιατί)

$$|a_n| < \rho^{n-n_0}|a_{n_0}| = \frac{|a_{n_0}|}{\rho^{n_0}} \cdot \rho^n.$$

Αφού $\lim_{n\to\infty} \rho^n = 0$, έπεται ότι $a_n \to 0$.

4. (α) *Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι $\sqrt[n]{a} \to 1$.*

(β) *Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \to a > 0$ τότε $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. Τι μπορείτε να πείτε αν $a_n \to 0$;*

(γ) *Δείξτε ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$.*

Υπόδειξη. (α) Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $a > 1$. Τότε, $\sqrt[n]{a} > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$\theta_n = \sqrt[n]{a} - 1.$$

Παρατηρήστε ότι $\theta_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν δείξουμε ότι $\theta_n \to 0$, τότε έχουμε το ζητούμενο: $1 + \theta_n \to 1$.

Αφού $\sqrt[n]{a} = 1 + \theta_n$, μπορούμε να γράψουμε

$$a = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n > n\theta_n.$$

Έπεται ότι

$$0 < \theta_n < \frac{a}{n},$$

και από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\theta_n \to 0$. Συνεπώς, $1+\theta_n \to 1$.
Αν $0 < a < 1$ τότε $\frac{1}{a} > 1$. Άρα,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1 \neq 0.$$

Συνεπώς, $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Τέλος, αν $a = 1$ τότε $\sqrt[n]{1} = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι τώρα φανερό ότι $\sqrt[n]{1} = 1 \to 1$.
(β) Επιλέγουμε $\varepsilon = a/2 > 0$. Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < a/2$. Ισοδύναμα, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a/2 < a_n < 3a/2$. Τότε,

$$\sqrt[n]{a/2} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{3a/2}.$$

Όμως, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a/2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3a/2} = 1$, από το (α). Τότε, το κριτήριο παρεμβολής μας εξασφαλίζει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Αν $a_n \to 0$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε το ίδιο: θεωρήστε τα παραδείγματα $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{3^n}$, $\gamma_n = \frac{1}{n^n}$. Τι παρατηρείτε για τις $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$;
(γ) Ορίζουμε

$$\theta_n = \sqrt[n]{n} - 1.$$

Παρατηρήστε ότι $\theta_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν δείξουμε ότι $\theta_n \to 0$, τότε έχουμε το ζητούμενο: $1 + \theta_n \to 1$.

Αφού $\sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n$, χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα, μπορούμε να γράψουμε

$$n = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n + \binom{n}{2}\theta_n^2 > \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2.$$

Έπεται ότι, για $n \geq 2$,

$$0 < \theta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

και από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\theta_n \to 0$. Συνεπώς, $1 + \theta_n \to 1$.

Ασκήσεις – Ομάδα Α΄

1. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Θεωρούμε τα σύνολα*

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n < 2.001\}\\
A_2 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n > 2.003\}\\
A_3 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n < 1.98\}\\
A_4 &= \{n \in \mathbb{N} : 1.99997 < a_n < 2.0001\}\\
A_5 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq 2\}.
\end{aligned}$$

Για κάθε $j = 1, \dots, 5$ εξετάστε αν (α) *το A_j είναι πεπερασμένο,* (β) *το $\mathbb{N} \setminus A_j$ είναι πεπερασμένο.*

Υπόδειξη. (α) Παίρνοντας $\varepsilon = 0.001 > 0$ βρίσκουμε $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $1.999 < a_n < 2.001$. Άρα, κάθε $n \geq n_1$ ανήκει στο A_1. Το $\mathbb{N} \setminus A_1$ είναι πεπερασμένο (και το A_1 άπειρο, και μάλιστα, τελικό τμήμα του $\mathbb{N}$).

(γ) Παίρνοντας $\varepsilon = 0.02 > 0$ βρίσκουμε $n_3 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_3$ ισχύει $1.98 < a_n < 2.02$. Άρα, κάθε $n \geq n_3$ ανήκει στο $\mathbb{N} \setminus A_3$. Το A_3 είναι πεπερασμένο (και το $\mathbb{N} \setminus A_3$ άπειρο, και μάλιστα, τελικό τμήμα του $\mathbb{N}$).

(δ) Παίρνοντας $\varepsilon = 0.00003 > 0$ βρίσκουμε $n_4 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_4$ ισχύει $1.99997 < a_n < 2.00003 < 2.0001$. Άρα, κάθε $n \geq n_4$ ανήκει στο A_4. Το $\mathbb{N} \setminus A_4$ είναι πεπερασμένο (και το A_4 άπειρο, και μάλιστα, τελικό τμήμα του $\mathbb{N}$).

(ε) Το A_5 μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο, εξαρτάται από την (a_n). Πάρτε σαν παραδείγματα τις ακολουθίες

$$a_n = 2, \qquad a_n = 2 + \frac{1}{n}, \qquad a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Όλες ικανοποιούν την $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $A_5 = \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \setminus A_5 = \emptyset$. Στην δεύτερη, $A_5 = \emptyset$ και $\mathbb{N} \setminus A_5 = \mathbb{N}$. Στην τρίτη, τόσο το A_5 όσο και το $\mathbb{N} \setminus A_5$ είναι άπειρα σύνολα (το σύνολο των περιττών και το σύνολο των άρτιων φυσικών, αντίστοιχα).

2. *Αποδείξτε με τον ορισμό ότι οι παρακάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο 0:*

$$a_n = \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}, \quad b_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}, \quad c_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & , \text{αν } n = 1, 4, 7, 10, 13, \dots \\ \frac{1}{n^2+1} & , \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Υπόδειξη. Ας δούμε για παράδειγμα την (c_n): από τις $2^n = (1+1)^n \geq 1 + n > n$ και $n^2 + 1 \geq n + 1 > n$ έχουμε $0 < c_n < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, αν ο n είναι της μορφής $n = 3k + 1$ για κάποιον μη αρνητικό ακέραιο k (δηλαδή, αν $n = 1, 4, 7, 10, 13, \dots$) τότε $0 < c_n = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$. Αν πάλι $n \neq 3k + 1$ για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k, τότε $0 < c_n = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n}$.

Αν τώρα μας δώσουν (τυχόν) $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$-\varepsilon < 0 < c_n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

δηλαδή, $|c_n| < \varepsilon$. Συνεπώς, $c_n \to 0$.

Σημείωση. Για τις (a_n) και (b_n) παρατηρήστε ότι

$$a_n = \frac{n}{n^3 + n^2 + 1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

και
$$b_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1} = \frac{1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} < \frac{1}{n}.$$
Κατόπιν, δουλέψτε όπως στην περίπτωση της (c_n).

3. *Αποδείξτε με τον ορισμό ότι*
$$a_n = \frac{n^2-n}{n^2+n} \to 1.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι
$$|a_n - 1| = \left|\frac{n^2-n}{n^2+n} - 1\right| = \left|\frac{-2n}{n^2+n}\right| = \frac{2n}{n^2+n} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρείτε $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - 1| < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon$.

4. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, δείξτε ότι $a_n > 0$ τελικά.*

Υπόδειξη. Επιλέγουμε $\varepsilon = a/2 > 0$. Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < a/2$. Ισοδύναμα, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a/2 < a_n < 3a/2$. Άρα, $a_n > a/2 > 0$ τελικά (από τον n_0-οστό όρο και πέρα).

5. (α) *Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $|a| < 1$. Δείξτε ότι η ακολουθία $b_n = a^n$ συγκλίνει στο 0.*

(β) *Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$;*

Υπόδειξη. (α) Η $(|b_n|)$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0. Άρα, υπάρχει $x \geq 0$ ώστε $|b_n| \to x$. Από την $|b_{n+1}| = |b_n| \cdot |a|$, παίρνοντας όριο ως προς n και στα δύο μέλη, έχουμε $x = x \cdot |a|$. Αφού $|a| \neq 1$, συμπεραίνουμε ότι $x = 0$.

(β) Παρατηρήστε ότι
$$\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| = \frac{|1-x^2|}{1+x^2} \leq \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1.$$

Επίσης, αν $x \neq 0$ τότε $\frac{1-x^2}{1+x^2} \neq \pm 1$ (εξηγήστε γιατί), άρα
$$\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| < 1.$$

Από το (α), αν $x \neq 0$ τότε η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n \to 0$. Τέλος, αν $x = 0$ έχουμε $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n = 1 \to 1$.

Δηλαδή, η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$ συγκλίνει, όποιο κι αν είναι το x.

6. *Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:*

$$\alpha_n = \frac{3^n}{n!}\,, \quad \beta_n = \frac{2n-1}{3n+2}\,, \quad \gamma_n = n - \sqrt{n^2 - n}\,, \quad \delta_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n .$$

$$\varepsilon_n = (\sqrt[n]{10} - 1)^n\,, \quad \zeta_n = \frac{n^6}{6^n}\,, \quad \eta_n = n^2 \sin\big(\frac{1}{n^3}\big)\,.$$

$$\theta_n = \frac{\sin\, n}{n}\,, \quad \kappa_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}\,, \quad \nu_n = \sqrt{n + \sqrt{n}\,} - \sqrt{n}\,, \quad \rho_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n .$$

$$\sigma_n = \frac{n^2}{3n^2 + n + 1}\,, \quad \tau_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}\,, \quad \xi_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}\,.$$

Υπόδειξη. (α) $\alpha_n = \frac{3^n}{n!}$: με το κριτήριο του λόγου. Παρατηρήστε ότι $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1$, άρα $\alpha_n \to 0$.

(β) $\beta_n = \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2-1/n}{3+2/n} \to \frac{2}{3}$.

(γ) $\gamma_n = n - \sqrt{n^2 - n} = \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} \to \frac{1}{2}$.

(δ) $\delta_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$: Παρατηρήστε ότι

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leq e,$$

διότι η $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον e. Παίρνοντας n-οστές ρίζες βλέπουμε ότι

$$1 + \frac{1}{n} \leq \delta_n \leq \sqrt[n]{e}.$$

Από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $\delta_n \to 1$ (αφού $1 + \frac{1}{n} \to 1$ και $\sqrt[n]{e} \to 1$).

(ε) $\varepsilon_n = (\sqrt[n]{10} - 1)^n$: με το κριτήριο της ρίζας. Παρατηρήστε ότι $\sqrt[n]{\varepsilon_n} = \sqrt[n]{10} - 1 \to 1 - 1 = 0 < 1$. Άρα, $\varepsilon_n \to 0$.

(ζ) $\zeta_n = \frac{n^6}{6^n}$: με το κριτήριο του λόγου. Παρατηρήστε ότι $\frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_n} = \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)^6 \to \frac{1}{6} < 1$. Άρα, $\zeta_n \to 0$.

(η) $\eta_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Χρησιμοποιώντας την $\sin t \leq t$ για $t > 0$, βλέπουμε ότι $0 < \eta_n \leq n^2 \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \to 0$. Άρα, $\eta_n \to 0$.

(ϑ) $\theta_n = \frac{\sin\, n}{n}$: η $(\sin n)$ είναι φραγμένη απολύτως από 1 και η $\left(\frac{1}{n}\right)$ μηδενική. Άρα, $\theta_n \to 0$.

(κ) $\kappa_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2/\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to \frac{2}{e} < 1.$$

Άρα, $\kappa_n \to 0$.

(ν) $\nu_n = \sqrt{n+\sqrt{n}\,} - \sqrt{n}$: παρατηρήστε ότι

$$\nu_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} \to \frac{1}{2}$$

(ρ) $\rho_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$: Παρατηρήστε ότι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \leq e,$$

διότι η $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον e. Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες βλέπουμε ότι

$$\sqrt{x_n} \leq \rho_n \leq \sqrt{e}.$$

Από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $\rho_n \to \sqrt{e}$.

(ς) $\sigma_n = \frac{n^2}{3n^2+n+1} \to \frac{1}{3}$.

(τ) $\tau_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3/\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to \frac{3}{e} > 1.$$

Άρα, $\tau_n \to +\infty$.

(ξ) $\xi_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}$: η $(\sin(n^3))$ είναι φραγμένη απολύτως από 1 και η $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ μηδενική. Άρα, $\xi_n \to 0$.

7. *Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:*

$$\alpha_n = \frac{5^n+n}{6^n-n}, \qquad \beta_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}}, \qquad \gamma_n = \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n,$$

$$\delta_n = n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n+1}}\right), \qquad \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(n^2\right),$$

$$\lambda_n = (-1)^n\frac{n^2}{n^2+1}, \quad \mu_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad \theta_n = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}.$$

Υπόδειξη. (α) $\alpha_n = \frac{5^n+n}{6^n-n} = \frac{(5/6)^n+(n/6^n)}{1-(n/6^n)} \to \frac{0-0}{1-0} = 0$.

(β) $\beta_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} \leq \beta_n \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2}.$$

Αφού $\sqrt[n]{2} \to 1$, από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών βλέπουμε ότι $\beta_n \to 1/2$.

(γ) $\gamma_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$: με το κριτήριο της ρίζας. Παρατηρήστε ότι $\sqrt[n]{\gamma_n} = \sqrt[n]{n} - 1 \to 1 - 1 = 0 < 1$. Άρα, $\gamma_n \to 0$.

(δ) $\delta_n = n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \right)$: γράφουμε

$$\begin{aligned} \delta_n &= n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}} \\ &= \frac{n^2}{n(n+1)} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}} \to \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(ε) $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(n^2)$: η $(\cos(n^2))$ είναι φραγμένη απολύτως από 1 και η $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ μηδενική. Άρα, $\varepsilon_n \to 0$.

(λ) $\lambda_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$: δεν συγκλίνει, αφού $\lambda_{2n} \to 1$ και $\lambda_{2n-1} \to -1$.

(μ) $\mu_n = \frac{n^n}{n!}$: παρατηρήστε ότι $\mu_n = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdots \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{1} \geq n$. Άρα, $\mu_n \to +\infty$.

(ϑ) $\theta_n = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{2} < 1,$$

άρα $\theta_n \to 0$.

8. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ b_n &= \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} \\ \gamma_n &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} \\ \delta_n &= \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{(n+1)^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, συμπεραίνουμε ότι $a_n \to 1$.

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n \leq 1 + n^2 + n^3 + \cdots + n^n \leq 1 + n + n^2 + n^3 + \cdots + n^n.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ για $x = n$, παίρνουμε

$$1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n \leq 1 + n + n^2 + \cdots + n^n = \frac{n^{n+1}-1}{n-1}.$$

Συνεπώς,

$$b_n = \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} \leq \frac{n^{n+1}-1}{n^n(n-1)} = \frac{n^{n+1}-1}{n^{n+1}-n^n} = \frac{1 - \frac{1}{n^{n+1}}}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$b_n = \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} \geq \frac{n^n}{n^n} = 1.$$

Δηλαδή,

$$1 \leq b_n \leq \frac{1 - \frac{1}{n^{n+1}}}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $b_n \to 1$.

(γ) Παρατηρήστε ότι

$$0 < \gamma_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} \leq \frac{n+1}{n!}.$$

Από το κριτήριο του λόγου προκύπτει εύκολα ότι $\frac{n+1}{n!} \to 0$. Άρα, $\gamma_n \to 0$.

(δ) Παρατηρήστε ότι

$$\delta_n = \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{(n+1)^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{2/3}} \geq \frac{n+1}{(2n)^{2/3}} > \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{4}} \to +\infty.$$

Άρα, $\delta_n \to +\infty$.

9. (α) *Έστω* $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$. *Δείξτε ότι*

$$b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \to \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

(β) *Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας*

$$x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}.$$

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε $a = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $a^n \leq a_1^n + \cdots + a_k^n \leq ka^n$. Άρα,

$$a \leq b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{ka^n} = a\sqrt[n]{k}.$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$ (βλέπε το 4(α) στην υπενθύμιση από τη θεωρία), από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $b_n \to a$. Για παράδειγμα,

$$\sqrt[n]{2^n + 3^n + 7^n} \to 7.$$

(β) Το πλήθος των προσθετέων (στον ορισμό του n-οστού όρου) δεν είναι σταθερό. Δουλέψτε όμως όπως στο (α): παρατηρήστε ότι $n^n < 1^n + 2^n + \cdots + n^n < n \cdot n^n$ αν $n \geq 2$. Άρα,

$$1 < x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n} < \sqrt[n]{n}$$

για κάθε $n \geq 2$. Αφού $\sqrt[n]{n} \to 1$, εφαρμόζεται το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, και $x_n \to 1$.

10. *Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία $x_n = \frac{[n\alpha]}{n}$ και, αν ναι, βρείτε το όριό της.*

Υπόδειξη. Από τον ορισμό του ακεραίου μέρους έχουμε $[n\alpha] \leq n\alpha < [n\alpha] + 1$, άρα

$$nx_n \leq n\alpha < nx_n + 1.$$

Έπεται ότι

$$\alpha - \frac{1}{n} < x_n \leq \alpha,$$

άρα $x_n \to \alpha$.

11. *Έστω $\alpha > 0$. Δείξτε ότι η ακολουθία $b_n = \frac{1+n\alpha}{(1+\alpha)^n}$ είναι φθίνουσα και προσδιορίστε το όριο της.*

Υπόδειξη. Η (b_n) έχει θετικούς όρους. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1 + (n+1)\alpha}{(1 + n\alpha)(1 + \alpha)} = \frac{1 + (n+1)\alpha}{1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2} < 1$$

άρα η (b_n) είναι φθίνουσα. Επίσης,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1+(n+1)\alpha}{(1+n\alpha)(1+\alpha)} = \frac{n+1}{n}\frac{\alpha+\frac{1}{n+1}}{\alpha+\frac{1}{n}}\frac{1}{1+\alpha} \to \frac{1}{1+\alpha} < 1.$$

Από το κριτήριο του λόγου, $b_n \to 0$.

12. *Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ και $b_n \to +\infty$.*

(α) *Δείξτε ότι υπάρχουν $\delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n > \delta$.*

(β) *Δείξτε ότι $a_n b_n \to +\infty$.*

Υπόδειξη. (α) Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου με $\varepsilon = a/2 > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Θέτοντας $\delta = a/2$ παίρνουμε το ζητούμενο.

(β) Έστω $M > 0$. Αφού $b_n \to +\infty$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $b_n > M/\delta$ για κάθε $n \geq n_1$. Θέτουμε $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Τότε, για κάθε $n \geq n_2$ έχουμε $a_n b_n > \delta(M/\delta) = M$. Με βάση τον ορισμό, $a_n b_n \to +\infty$.

13. *Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $a = \sup A$, δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.*

Αν, επιπλέον, το $\sup A$ δεν είναι στοιχείο του A, δείξτε ότι η παραπάνω ακολουθία μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι γνησίως αύξουσα.

Υπόδειξη. Από τον βασικό χαρακτηρισμό του supremum, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x = x(\varepsilon) \in A$ ώστε $a - \varepsilon < x \leq a$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το παραπάνω για $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, μπορείτε να βρείτε ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $a - \frac{1}{n} < a_n \leq a$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $a_n \to a$.

Ας υποθέσουμε, επιπλέον, ότι ο $a = \sup A$ δεν είναι στοιχείο του A. Υπάρχει $a_1 \in A$ που ικανοποιεί την $a - 1 < a_1 \leq a$. Όμως, $a_1 \neq a$ (διότι $a \notin A$), άρα $a - 1 < a_1 < a$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρει $a_1, \ldots, a_m \in A$ που ικανοποιούν τα εξής:

(i) $a_1 < a_2 < \cdots < a_m < a$.

(ii) Για κάθε $k = 1, \ldots, m$ ισχύει $a - \frac{1}{k} < a_k < a$.

Τότε, ο $s_m = \max\{a - \frac{1}{m+1}, a_m\}$ είναι μικρότερος από τον a. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $a_{m+1} \in A$ που ικανοποιεί την $s_m < a_{m+1} < a$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, $a_m < a_{m+1}$ και $a - \frac{1}{m+1} < a_{m+1} < a$.

Επαγωγικά, ορίζεται γνησίως αύξουσα ακολουθία (a_n) στοιχείων του A που ικανοποιούν την $a - \frac{1}{n} < a_n < a$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $a_n \to a$.

14. *Δείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας ρητών αριθμών, καθώς επίσης και όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας άρρητων αριθμών.*

Υπόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $q_1 \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιεί την $x - 1 < q_1 < x$ (από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$).

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρει ρητούς αριθμούς $q_1, \ldots, q_m$ που ικανοποιούν τα εξής:

(i) $q_1 < q_2 < \cdots < q_m < x$.

(ii) Για κάθε $k = 1, \ldots, m$ ισχύει $x - \frac{1}{k} < q_k < x$.

Τότε, ο $s_m = \max\{x - \frac{1}{m+1}, q_m\}$ είναι μικρότερος από τον x. Λόγω της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς, μπορούμε να βρούμε $q_{m+1} \in \mathbb{Q}$ στο ανοικτό διάστημα (s_m, x). Τότε, $q_m < q_{m+1}$ και $x - \frac{1}{m+1} < q_{m+1} < x$.

Επαγωγικά, ορίζεται γνησίως αύξουσα ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών που ικανοποιούν την $x - \frac{1}{n} < q_n < x$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $q_n \to x$.

15. *Δείξτε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to a > 0$, τότε*

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Υπόδειξη. Η βασική ιδέα είναι ότι, αφού $a > 0$ και $a_n \to a$, θα υπάρχει n_0 με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n > a/2$. Δηλαδή, τελικά όλοι οι όροι της (a_n) ξεπερνούν τον θετικό αριθμό $a/2$.

Πράγματι, αν εφαρμόσετε τον ορισμό του ορίου για την (a_n) με $\varepsilon = a/2 > 0$, μπορείτε να βρείτε $n_0 \in \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$|a_n - a| < \varepsilon = a/2 \Longrightarrow a/2 < a_n < 3a/2.$$

Τότε, ο θετικός αριθμός $m := \min\{a_1, \ldots, a_{n_0}, a/2\}$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, $\inf(A) \geq m > 0$.

16. *Δείξτε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to 0$, τότε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.*

Υπόδειξη. Η βασική ιδέα είναι ότι, αφού $a_1 > 0$ και $a_n \to 0$, θα υπάρχει n_0 με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n < a_1$. Δηλαδή, υπάρχει στοιχείο του A μεγαλύτερο από «όλα» (εκτός από πεπερασμένα το πλήθος) τα στοιχεία του A.

Πράγματι, αν εφαρμόσετε τον ορισμό του ορίου για την (a_n) με $\varepsilon = a_1 > 0$, μπορείτε να βρείτε $n_0 \in \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$a_n = |a_n - 0| < \varepsilon = a_1.$$

Τότε, ο μεγαλύτερος από τους $a_1, \ldots, a_{n_0}$ είναι το μέγιστο στοιχείο του A: ανήκει στο A και είναι μεγαλύτερος ή ίσος από κάθε a_n (εξηγήστε γιατί).

17. *Δείξτε ότι η ακολουθία $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα αν η (y_n) είναι μονότονη.*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0, \end{aligned}$$

άρα η (y_n) είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης,

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

αφού το άθροισμα που ορίζει τον y_n έχει n προσθετέους το πολύ ίσους με $\frac{1}{n+1}$. Άρα, η (y_n) είναι άνω φραγμένη. Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, η (y_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

18. *Θέτουμε $a_1 = \sqrt{6}$ και, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$.*
Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $(a_n)_n$.

Υπόδειξη. Δείξτε με επαγωγή ότι η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον 3. Άρα, $a_n \to x$ για κάποιον x που ικανοποιεί την $x = \sqrt{6+x}$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι -2 και 3. Αφού η (a_n) έχει θετικούς όρους, $a_n \to 3$.

19. *Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = 1$ και*

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε αν συγκλίνει.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε πρώτα ότι, αν η (a_n) συγκλίνει τότε το όριο της θα ικανοποιεί την $x = \frac{2x+1}{x+1}$ (εξηγήστε γιατί). Άρα $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η (a_n) ορίζεται καλά. Αρκεί να δείξετε ότι $a_n \neq -1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε με επαγωγή ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Η (a_n) είναι αύξουσα (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι αν $a_m \leq a_{m+1}$ τότε

$$a_{m+2} - a_{m+1} = \frac{a_{m+1} - a_m}{(a_{m+1}+1)(a_m+1)} \geq 0.$$

(iii) Η (a_n) είναι άνω φραγμένη (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$a_{m+1} = \frac{2a_m + 1}{a_m + 1} \leq \frac{2a_m + 2}{a_m + 1} = 2$$

για κάθε m. Θα μπορούσατε επίσης να δείξετε ότι $a_m \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ για κάθε m (αφού, από τα παραπάνω, αυτό είναι το «υποψήφιο όριο» της *αύξουσας* ακολουθίας (a_n)).

Αφού η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, συγκλίνει (στον $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

20. *Ορίζουμε μια ακολουθία* (α_n) *με* $\alpha_1 = 0$ *και* $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n^2+1}{2\alpha_n+2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Δείξτε ότι:*

(α) *Η* (α_n) *είναι αύξουσα.*

(β) $\alpha_n \to 1$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε πρώτα ότι $\alpha_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{3\alpha_n^2 + 1}{2\alpha_n + 2} - \alpha_n = \frac{\alpha_n^2 - 2\alpha_n + 1}{2\alpha_n + 2} = \frac{(\alpha_n - 1)^2}{2\alpha_n + 2} \geq 0,$$

άρα η (α_n) είναι αύξουσα.

(β) Η (α_n) είναι άνω φραγμένη από τον 1. Δείξτε το επαγωγικά: αν $\alpha_n \leq 1$ τότε $3\alpha_n^2 + 1 = 2\alpha_n^2 + \alpha_n^2 + 1 \leq 2\alpha_n + 1 + 1 = 2\alpha_n + 2$, οπότε $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n^2+1}{2\alpha_n+2} \leq 1$.

Αφού η (α_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, συγκλίνει σε κάποιον $x > 0$ ο οποίος ικανοποιεί την $x = \frac{3x^2+1}{2x+2}$, δηλαδή $x^2 - 2x + 1 = 0$. Άρα, $x = 1$.

21. *Θεωρούμε την ακολουθία* (α_n) *που ορίζεται από τις* $\alpha_1 = 3$ *και* $\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n+3}{5}$, $n = 1, 2, \ldots$. *Δείξτε ότι η* (α_n) *συγκλίνει και υπολογίστε το όριο της.*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\alpha_2 = \frac{9}{5} < 3 = \alpha_1$. Δείξτε με επαγωγή ότι η (α_n) είναι φθίνουσα. Αφού (απλό) η (α_n) είναι και κάτω φραγμένη από τον $3/5$, συγκλίνει στη λύση της εξίσωσης $x = \frac{2x+3}{5}$. Δηλαδή, $\alpha_n \to 1$.

22. *Έστω* $a > 0$. *Θεωρούμε τυχόν* $x_1 > 0$ *και για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ορίζουμε*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Δείξτε ότι η (x_n)*, τουλάχιστον από τον δεύτερο όρο της και πέρα, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον* $\sqrt{a}$. *Βρείτε το* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Υπόδειξη. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η (x_n) ορίζεται καλά. Αρκεί να δείξετε ότι $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε με επαγωγή ότι $x_n > 0$ για κάθε n.

(ii) Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει $x_n \geq \sqrt{a}$ (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει $x_n \geq x_{n+1}$ (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geq 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού η $(x_n)_{n\geq 2}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συγκλίνει. Το όριο x είναι θετικό (από τα προηγούμενα έχουμε $x \geq \sqrt{a}$) και πρέπει να ικανοποιεί την $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, δηλαδή $x^2 = a$. Άρα, $x = \sqrt{a}$.

Ασκήσεις – Ομάδα Β΄

23. *Εστω (a_n) ακολουθία με $a_n \to a$. Ορίζουμε μια δεύτερη ακολουθία (b_n) θέτοντας*

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Δείξτε ότι $b_n \to a$.

Υπόδειξη. Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $a = 0$ και δείχνουμε ότι $b_n \to 0$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon/2$. Τότε, για κάθε $n > n_1$ έχουμε

$$|b_n| \leq \frac{|a_1 + \cdots + a_{n_1}|}{n} + \frac{n - n_1}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{|a_1 + \cdots + a_{n_1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ο αριθμός $A := |a_1 + \cdots + a_{n_1}|$ εξαρτάται από το ε (αφού ο n_1 εξαρτάται από το ε) όχι όμως από το n. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει $n_2(A) = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_2$ έχουμε

$$\frac{|a_1 + \cdots + a_{n_1}|}{n} = \frac{A}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν λοιπόν πάρουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ τότε, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει η

$$|b_n| \leq \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Με βάση τον ορισμό, $b_n \to 0$.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρήστε την ακολουθία $a_n' := a_n - a$. Τότε, $a_n' \to 0$. Άρα,

$$b_n - a = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a = \frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} = \frac{a_1' + \cdots + a_n'}{n} \to 0.$$

Έπεται ότι $b_n \to a$.

24. *Έστω (a_n) ακολουθία θετικών όρων με $a_n \to a > 0$. Δείξτε ότι*

$$b_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \to a \quad \text{και} \quad \gamma_n := \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \to a.$$

Υπόδειξη. Αφού $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$, η Άσκηση 23 δείχνει ότι

$$\frac{1}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \to \frac{1}{a}.$$

Αρα, $b_n \to a$. Για την γ_n, παρατηρήστε ότι $b_n \leq \gamma_n \leq \delta_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ από την ανισότητα αρμονικού-γεωμετρικού-αριθμητικού μέσου, και εφαρμόστε το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών σε συνδυασμό με την Άσκηση 23.

25. *Έστω (a_n) ακολουθία με $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$. Δείξτε ότι*

$$\frac{a_n}{n} \to a.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\frac{a_n}{n} = \frac{(a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1}{n} = \frac{b_{n-1} + \cdots + b_1}{n} + \frac{a_1}{n}$$

όπου $b_n := a_{n+1} - a_n \to a$. Τώρα, χρησιμοποιήστε την Άσκηση 23.

26. *Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία με την ιδιότητα*

$$b_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to a.$$

Δείξτε ότι $a_n \to a$.

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η (a_n) είναι άνω φραγμένη. Τότε, η (a_n) συγκλίνει και, από την Άσκηση 23, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $a_1 \geq 0$. Τότε, $a_n \geq a_1 \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η (b_n) συγκλίνει, είναι φραγμένη: ειδικότερα, υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_1 + \cdots + a_k = kb_k \leq kM$. Παίρνοντας $k = 2n$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (a_n) είναι αύξουσα, γράφουμε

$$na_n \leq a_{n+1} + \cdots + a_{2n} \leq a_1 + \cdots + a_{2n} = 2nb_{2n} \leq 2nM.$$

Δηλαδή, η (a_n) είναι άνω φραγμένη από τον $2M$. Πού χρησιμοποιήθηκε η υπόθεση ότι οι όροι της (a_n) είναι μη αρνητικοί;

Για τη γενική περίπτωση, θεωρήστε την (αύξουσα ακολουθία) $a'_n = a_n - a_1$ και την $b'_n := \frac{a'_1+\cdots+a'_n}{n}$. Από την υπόθεση έχουμε $b'_n \to a - a_1$ και, όπως ορίστηκε η (a'_n), έχουμε $a'_1 = 0$. Άρα, η (a'_n) είναι άνω φραγμένη. Έπεται ότι η (a_n) είναι άνω φραγμένη (εξηγήστε γιατί).

27. *Δείξτε ότι: αν* $a_n > 0$ *και* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, *τότε* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1 \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n},$$

όπου $b_1 = a_1$ και $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$. Από την υπόθεση έχουμε $b_n \to a$ και, από την Άσκηση 24, η ακολουθία των γεωμετρικών μέσων της (b_n) συγκλίνει στον a. Δηλαδή, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

28. *Προσδιορίστε τα όρια των ακολουθιών:*

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^{1/n} \\ \beta_n &= \frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{1/n} \\ \gamma_n &= \left[\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n} \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Για την $\alpha_n = \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^{1/n}$ θέτουμε $x_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \to 4.$$

Άρα, $\alpha_n \to 4$ από την Άσκηση 28.

Για την $\beta_n = \frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{1/n} = \left[\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}\right]^{1/n}$ θέτουμε $y_n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{4}{e}.$$

Άρα, $\beta_n \to \frac{4}{e}$ από την Άσκηση 28.

Για την $\gamma_n = \left[\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n}$ θέτουμε $z_n = \frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \to e.$$

Άρα, $\gamma_n \to e$ από την Άσκηση 28.

29. *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq k\}$ είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < \varepsilon$. Το σύνολο $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq k\}$ είναι πεπερασμένο, άρα έχει μέγιστο στοιχείο. Θέτουμε $n_0 = \max(A_k) + 1$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $n \notin A_k$, άρα $|a_n| > k$ (ειδικότερα, $a_k \neq 0$). Έπεται ότι, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

30. *Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad c_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

και

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad e_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$. Για παράδειγμα,

(α) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = x_{n-1} \to e$.

(β) $b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{n+1}{n+2}x_{n+1}x_n \to e^2$.

(γ) $\frac{1}{c_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \frac{n}{n-1}x_{n-1} \to e$, άρα $c_n \to \frac{1}{e}$.

(δ) $d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \cdot e = 1$.

(ε) $e_n^3 = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{3n} \to e^2$ (γιατί;), άρα $e_n \to \sqrt[3]{e^2}$.

31. *Θεωρούμε γνωστό ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$. Δείξτε ότι, για κάθε ρητό αριθμό q, ισχύει:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{q}{n}\right)^n = e^q .$$

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι, για κάθε $x > 0$, η ακολουθία $t_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα. Ένας τρόπος για να το δούμε είναι εφαρμόζοντας την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου για τους αριθμούς $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 1 + \frac{x}{n}$ και $s_{n+1} = 1$. Έχουμε

$$s_1 \cdots s_n s_{n+1} \leq \left(\frac{s_1 + \cdots + s_n + s_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1},$$

δηλαδή

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot 1 \leq \left(\frac{n\left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Αφού $n\left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1 = n + 1 + x$, συμπεραίνουμε ότι

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+1+x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Θεωρούμε θετικό ρητό $q = \frac{k}{m}$, όπου $k, m \in \mathbb{N}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\left(1 + \frac{k}{mn}\right)^n \to e^{k/m}.$$

Ισοδύναμα, ότι

$$b_n = \left(1 + \frac{k}{mn}\right)^{mn} \to e^k.$$

Παρατηρήστε ότι η (b_n) είναι αύξουσα: ζητάμε

$$b_{n+1} = t_{m(n+1)}(k) \geq t_{mn}(k) = b_n,$$

το οποίο ισχύει για κάθε n, αφού η $t_n(k)$ είναι αύξουσα και $m(n+1) > mn$. Επιπλέον,

$$b_{kn} = \left(1 + \frac{k}{mkn}\right)^{mkn} = \left[\left(1 + \frac{1}{mn}\right)^{mn}\right]^k \to e^k,$$

διότι $\left(1 + \frac{1}{mn}\right)^{mn} \to e$. Τώρα, για τυχόν $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε n_0 ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$e^k - \varepsilon < b_{kn} < e^k + \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n > kn_0$ έχουμε

$$e^k - \varepsilon < b_{kn_0} \leq b_n \leq b_{kn} < e^k + \varepsilon.$$

Συνεπώς, $b_n \to e^k$.

Για την περίπτωση $q < 0$ δουλεύουμε με παρόμοιο τρόπο.

32. *Έστω $0 < a_1 < b_1$. Ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες θέτοντας*

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) *Δείξτε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) φθίνουσα.*

(β) *Δείξτε ότι οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.*

Υπόδειξη. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) $a_n > 0$ και $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τον αναδρομικό ορισμό (ανεξάρτητα μάλιστα από το ποιοι είναι οι a_n και b_n) έχετε

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}.$$

(iii) Η (a_n) είναι αύξουσα. Παρατηρήστε ότι $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Η (b_n) είναι φθίνουσα. Παρατηρήστε ότι $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leq \frac{2b_n}{2} = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα παραπάνω, η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον b_1, ενώ η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον a_1 (εξηγήστε γιατί). Άρα, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Από την $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ έπεται ότι $b = \frac{a+b}{2}$, δηλαδή $a = b$.

33. *Επιλέγουμε $x_1 = a$, $x_2 = b$ και θέτουμε*

$$x_{n+2} = \frac{x_n}{3} + \frac{2x_{n+1}}{3}.$$

Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $y_n = x_{n+1} - x_n$ και βρείτε αναδρομικό τύπο για την (y_n).]

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{x_{n+1} - x_n}{3}.$$

Άρα, η ακολουθία $y_n = x_{n+1} - x_n$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση $y_{n+1} = -\frac{y_n}{3}$. Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$y_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} y_1 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} (b - a).$$

Παρατηρήστε ότι

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = a + y_1 + \cdots + y_{n-1}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} x_n &= a + \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)(b-a) \\ &= a + \frac{1-(-\frac{1}{3})^{n-1}}{1-(-\frac{1}{3})}(b-a) \to a + \frac{3}{4}(b-a) = \frac{3b+a}{4}. \end{aligned}$$

34. *Δώστε παράδειγμα δύο ακολουθιών (x_n), (y_n) με θετικούς όρους, οι οποίες ικανοποιούν τα εξής:*

(α) $x_n \to +\infty$ *και* $y_n \to +\infty$.

(β) *Η ακολουθία* $\frac{x_n}{y_n}$ *είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.*

Υπόδειξη. Θέτουμε $x_n = n \to +\infty$ και $y_n = n$ αν ο n είναι περιττός, $y_n = n/2$ αν ο n είναι άρτιος. Αφού $y_n \geq n/2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $y_n \to +\infty$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{x_n}{y_n} = 1$ αν ο n είναι περιττός και $\frac{x_n}{y_n} = 2$ αν ο n είναι άρτιος. Άρα, η ακολουθία $\frac{x_n}{y_n}$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.

35. *Έστω (a_n), (b_n) δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(α) *Αν, επιπλέον, η (b_n) είναι φραγμένη, δείξτε ότι* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

(β) *Δώστε παράδειγμα ακολουθιών για τις οποίες* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ *αλλά δεν ισχύει* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε $a_n - b_n = b_n\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right)$. Από την υπόθεση, η (b_n) είναι φραγμένη και η $\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right)$ είναι μηδενική. Συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

(β) Θεωρήστε τις $a_n = n + 1$ και $b_n = n$.

36. (Λήμμα του Stolz) *Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω (b_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Δείξτε ότι αν*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda,$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda = +\infty$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lambda$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ (η περίπτωση $\lambda = +\infty$ εξετάζεται ανάλογα). Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $b_n \to +\infty$, βλέπουμε ότι υπάρχει $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $b_n > 0$ και

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $b_{n+1} - b_n > 0$. Άρα, για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει

$$\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n).$$

Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι: για κάθε $n > n_1$ ισχύει

$$\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n - b_{n_1}) < a_n - a_{n_1} < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n - b_{n_1}).$$

Διαιρώντας με b_n παίρνουμε

$$\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n}\right] = \lambda - \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n}\right] = \lambda + \frac{\varepsilon}{2}$$

γιατί $b_n \to +\infty$ όταν $n \to \infty$. Άρα (εξηγήστε γιατί) υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$, που εξαρτάται από το n_1 και από το ε, ώστε: για κάθε $n \geq n_2$ ισχύει

$$\lambda - \varepsilon < \left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n} < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n} < \lambda + \varepsilon.$$

Συνεπώς, αν $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \lambda + \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

37. *Ορίζουμε ακολουθία* (a_n) *με* $0 < a_1 < 1$ *και* $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. *Δείξτε ότι* $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$.

Υπόδειξη. Επαγωγικά δείχνουμε ότι $0 < a_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (για το επαγωγικό βήμα παρατηρήστε ότι αν $0 < a_n < 1$ τότε έχουμε και $0 < 1 - a_n < 1$, οπότε πολλαπλασιάζοντας βλέπουμε ότι $0 < a_n(1 - a_n) < 1$, δηλαδή $0 < a_{n+1} < 1$).

Από την αναδρομική σχέση έχουμε

$$a_{n+1} - a_n = -a_n^2 < 0,$$

άρα $a_n > a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Αφού είναι και κάτω φραγμένη από το 0, η (a_n) συγκλίνει σε κάποιον $x \geq 0$. Πάλι από την αναδρομική σχέση, ο x ικανοποιεί την $x = x(1 - x) = x - x^2$, δηλαδή $x^2 = 0$. Άρα, $a_n \to 0$.

Με βάση τα παραπάνω, η ακολουθία $b_n = \frac{1}{a_n}$ ορίζεται καλά, είναι γνησίως αύξουσα, και $\frac{1}{a_n} \to +\infty$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$na_n = \frac{n}{b_n}$$

και εφαρμόζουμε το Λήμμα του Stolz: έχουμε

$$\frac{(n+1) - n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{a_n(1-a_n)} - \frac{1}{a_n}} = 1 - a_n \to 1,$$

άρα

$$na_n = \frac{n}{b_n} \to 1$$

από την Άσκηση 36.

Κεφάλαιο 3

Συναρτήσεις

Ασκήσεις – Ομάδα Α′

1. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : [0,1] \to [a,b] : x \to a+(b-a)x$ είναι 1-1 και επί.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x, y \in [0,1]$ και $f(x) = f(y)$. Τότε,

$$a + (b-a)x = a + (b-a)y \Longrightarrow (b-a)x = (b-a)y \Longrightarrow x = y.$$

Άρα, η f είναι 1-1.

Για να δείξουμε ότι η f είναι επί, θεωρούμε τυχόν $z \in [a,b]$ και ζητάμε $x \in [0,1]$ με την ιδιότητα $f(x) = z$. Ισοδύναμα, $a + (b-a)x = z$. Η μοναδική λύση αυτής της εξίσωσης είναι ο $x = \frac{z-a}{b-a}$, ο οποίος ανήκει στο $[0,1]$: αφού $a \leq z \leq b$, έχουμε $0 \leq z - a \leq b - a$ άρα $0 \leq \frac{z-a}{b-a} \leq 1$.

2. *Έστω $f, g : [0,1] \to [0,1]$ με $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ και $g(t) = 4t(1-t)$.*
(α) *Να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$.*
(β) *Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} αλλά δεν ορίζεται η g^{-1}.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε πρώτα ότι αν $x \in [0,1]$ τότε $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \in [0,1]$ και αν $t \in [0,1]$ τότε $g(t) = 4t(1-t) \in [0,1]$. Δηλαδή, οι f και g ορίζονται καλά.

(α) Έχουμε

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1-g(x)}{1+g(x)} = \frac{1-4x(1-x)}{1+4x(1-x)}$$

και

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4f(x)(1-f(x)) = 4\frac{1-x}{1+x}\left(1 - \frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{8x(1-x)}{(1+x)^2}.$$

(β) Η g δεν είναι 1-1. Για παράδειγμα, $g(1/3) = g(2/3) = 8/9$ και γενικά $g(t) = g(1-t)$ για κάθε $t \in [0,1]$. Άρα, η g^{-1} δεν ορίζεται.

Η f είναι 1-1: αν $x, y \in [0,1]$ και $\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-y}{1+y}$ τότε $(1-x)(1+y) = (1-y)(1+x)$ δηλαδή $1 - x + y - xy = 1 - y + x - xy$. Έπεται ότι $x = y$. Αφού η f είναι 1-1, ορίζεται η f^{-1} στο $f([0,1])$. Μπορείτε μάλιστα να δείξετε ότι η f είναι επί και ότι η $f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ δίνεται από την $f^{-1}(z) = \frac{1-z}{1+z}$. Με άλλα λόγια, $f^{-1} = f$.

3. *Έστω $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ δύο συναρτήσεις που είναι 1-1 και επί. Δείξτε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $(f \circ g)^{-1}$ της $f \circ g$ και ότι $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι $g : X \to Y$ και $f : Y \to Z$ είναι 1-1 και επί. Ζητάμε $h : Z \to X$ ώστε $h \circ (f \circ g) = Id_X$ και $(f \circ g) \circ h = Id_Z$. Η Άσκηση μας έχει ήδη δώσει την h. Η $g^{-1} \circ f^{-1} : Z \to X$ ορίζεται καλά γιατί οι f και g είναι αντιστρέψιμες και $f^{-1} : Z \to Y$, $g^{-1} : Y \to X$. Τέλος,

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g = g^{-1} \circ Id_Y \circ g = g^{-1} \circ (Id_Y \circ g) = g^{-1} \circ g = Id_X$$

και

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ Id_Y \circ f^{-1} = f \circ (Id_Y \circ f^{-1}) = f \circ f^{-1} = Id_Z.$$

Σημείωση: Για να δείξετε ότι η $f \circ g$ είναι 1-1 και επί:

(α) Αν $x_1, x_2 \in X$ και $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$, τότε $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ άρα $g(x_1) = g(x_2)$ διότι η f είναι 1-1. Όμοια, από την $g(x_1) = g(x_2)$ βλέπουμε ότι $x_1 = x_2$, αφού η g είναι 1-1. Αυτό αποδεικνύει ότι η $f \circ g$ είναι 1-1.

(β) Αν $z \in Z$ τότε υπάρχει $y \in Y$ ώστε $f(y) = z$ (γιατί η f είναι επί) και υπάρχει $x \in X$ ώστε $g(x) = y$ (γιατί η g είναι επί). Τότε, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(y) = z$. Αυτό αποδεικνύει ότι η $f \circ g$ είναι επί.

4. *Έστω $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ δύο συναρτήσεις. Δείξτε ότι*

(α) *αν η $f \circ g$ είναι επί τότε και η f είναι επί.*

(β) *αν η $f \circ g$ είναι 1-1 τότε και η g είναι 1-1.*

Ισχύουν τα αντίστροφα των (α) και (β);

Υπόδειξη. Έστω $g : X \to Y$ και $f : Y \to Z$ δύο συναρτήσεις.

(α) Έστω ότι η $f \circ g$ είναι επί. Για να δείξουμε ότι η f είναι επί θεωρούμε τυχόν $z \in Z$ και ζητάμε $y \in Y$ ώστε $f(y) = z$. Αφού η $f \circ g$ είναι επί, υπάρχει $x \in X$ ώστε $f(g(x)) = (f \circ g)(x) = z$. Παίρνοντας $y = g(x) \in Y$ έχουμε το ζητούμενο. Το αντίστροφο του (α) δεν ισχύει: δοκιμάστε τις $f(x) = x$ και $g(x) = 1$ (από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$).

(β) Έστω ότι η $f \circ g$ είναι 1-1. Για να δείξουμε ότι η g είναι 1-1 θεωρούμε $x_1, x_2 \in X$ με $g(x_1) = g(x_2)$ και δείχνουμε ότι $x_1 = x_2$. Αφού $g(x_1) = g(x_2)$ έχουμε $(f \circ g)(x_1) =$

$f(g(x_1)) = f(g(x_2)) = (f \circ g)(x_2)$. Αφού η $f \circ g$ είναι 1-1, έπεται ότι $x_1 = x_2$. Το αντίστροφο του (β) δεν ισχύει: δοκιμάστε τις $g(x) = x$ και $f(x) = 1$ (από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$).

5. *Έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $g : Y \to X$ και $h : Y \to X$ ώστε $f \circ g = Id_Y$ και $h \circ f = Id_X$. Δείξτε ότι $h = g$.*

Υπόδειξη. Από την $f \circ g = Id_Y$ και από την Άσκηση 4(α), η f είναι επί. Από την $h \circ f = Id_X$ και από την Άσκηση 4(β), η f είναι 1-1. Άρα, η $f^{-1} : Y \to X$ ορίζεται καλά και ικανοποιεί τις $f^{-1} \circ f = Id_Y$, $f \circ f^{-1} = Id_X$. Τώρα, παρατηρήστε ότι

$$h = h \circ (f \circ f^{-1}) = (h \circ f) \circ f^{-1} = Id_X \circ f^{-1} = f^{-1}$$

και

$$g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ Id_Y = f^{-1}.$$

Δηλαδή, $h = g = f^{-1}$.

6. *Έστω $f(x) = \frac{1}{1+x}$.*

(α) *Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.*

(β) *Να βρεθεί η $f \circ f$.*

(γ) *Να βρεθούν τα $f(\frac{1}{x})$, $f(cx)$, $f(x+y)$, $f(x) + f(y)$.*

(δ) *Για ποιά $c \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(cx) = f(x)$;*

(ε) *Για ποια $c \in \mathbb{R}$ η σχέση $f(cx) = f(x)$ ικανοποιείται για δύο διαφορετικές τιμές του $x \in \mathbb{R}$;*

7. *Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα I_1 και I_2, είναι αλήθεια ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $I_1 \cup I_2$;*

Υπόδειξη. Όχι. Αν ορίσετε την $f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $x \in [0,1]$ και $f(x) = x - 3$ αν $x \in [2,3]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $I_1 = [0,1]$ και $I_2 = [2,3]$. Όμως, $f(0) = 0 > -1 = f(2)$. Άρα, η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $I_1 \cup I_2$.

8. *Έστω $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2+1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$. Εξετάστε αν είναι μονότονη και βρείτε την f^{-1} (αν αυτή ορίζεται).*

Υπόδειξη. Η f ορίζεται καλά στο 1: $1 + 1 = 1^2 + 1$. Παρατηρήστε ότι

(α) Αν $x < y \leq 1$ τότε $f(x) = x + 1 < y + 1 = f(y)$.

(β) Αν $1 \leq x < y$ τότε $f(x) = x^2 + 1 < y^2 + 1 = f(y)$.

(γ) Αν $x < 1 < y$ τότε $f(x) < f(1) < f(y)$ από τα (α) και (β).

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $x < y$ τότε $f(x) < f(y)$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρήστε ότι

(α) Αν $y \leq 2$ τότε $f(y-1) = y$.

(β) Αν $y \geq 2$ τότε $f(\sqrt{y-1}) = y$.

Συνεπώς, η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζεται από τις $f^{-1}(y) = y - 1$ αν $y \leq 2$ και $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$ αν $y \geq 2$.

9. *Έστω $f(x) = x + 1$. Να βρεθεί μια συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $g \circ f = f \circ g$. Είναι η g μοναδική;*

Υπόδειξη. Η g πρέπει να ικανοποιεί την $g(f(x)) = f(g(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, την

$$g(x+1) = g(x) + 1.$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $g(x) = x$. Αν h είναι οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1, τότε

$$(h+g)(x+1) = h(x+1) + g(x+1) = h(x) + g(x) + 1 = (h+g)(x) + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, η $h + g$ ικανοποιεί κι αυτή την $(h+g) \circ f = f \circ (h+g)$.

10. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Ποιο είναι το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})$;*

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και στο $[0, +\infty)$. Εξηγήστε γιατί (παρόμοιο επιχείρημα χρησιμοποιήθηκε στην Άσκηση 12).

Ας υποθέσουμε ότι $x < y \leq 0$. Θέλουμε να ελέγξουμε ότι $\frac{x}{1-x} < \frac{y}{1-y}$. Αφού $1 - x$ και $1 - y > 0$, ισοδύναμα ζητάμε $x(1-y) < y(1-x)$ δηλαδή $x - xy < y - xy$ (που ισχύει).

Με τον ίδιο τρόπο δείξτε ότι αν $0 \leq x < y$ τότε $\frac{x}{x+1} < \frac{y}{y+1}$.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$|f(x)| = \frac{|x|}{|x|+1} < 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(\mathbb{R}) \subseteq (-1, 1)$. Δείξτε ότι ισχύει ισότητα: αν $0 < y < 1$ τότε υπάρχει $x > 0$ ώστε $f(x) = \frac{x}{x+1} = y$, ενώ αν $-1 < y < 0$ τότε υπάρχει $x < 0$ ώστε $f(x) = \frac{x}{1-x} = y$.

11. *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, συμβολίζουμε με $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ την* ***χαρακτηριστική συνάρτηση*** *του A που ορίζεται από την $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in A \\ 0 & \text{αν } x \notin A \end{cases}$. Αποδείξτε ότι* (α) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ (*ειδικότερα* $\chi_A = \chi_A^2$),

(β) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$,

(γ) $\chi_{\mathbb{R}\setminus A} = 1 - \chi_A$,

(δ) $A \subseteq B \iff \chi_A \leq \chi_B$ *και*

(ε) *Αν* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι μια συνάρτηση με* $f^2 = f$, *τότε υπάρχει* $A \subseteq \mathbb{R}$ *ώστε* $f = \chi_A$.

12. *Μια συνάρτηση* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *λέγεται* ***άρτια*** *αν* $g(-x) = g(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *και* ***περιττή*** *αν* $g(-x) = -g(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι κάθε συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *γράφεται ως άθροισμα* $f = f_a + f_p$ *όπου* f_a *άρτια και* f_p *περιττή, και ότι αυτή η αναπαράσταση είναι μοναδική.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι: αν η f γράφεται στη μορφή $f = f_a + f_p$ όπου η f_a είναι άρτια και η f_p περιττή τότε, βάζοντας όπου x τον $-x$ στην $f(x) = f_a(x) + f_p(x)$, παίρνουμε

$$f(-x) = f_a(-x) + f_p(-x) = f_a(x) - f_p(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, οι f_a και f_p πρέπει να ικανοποιούν τις

$$\begin{aligned} f(x) &= f_a(x) + f_p(x) \\ f(-x) &= f_a(x) - f_p(x) \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αναγκαστικά (εξηγήστε γιατί), οι f_a και f_p πρέπει να δίνονται από τις

$$f_a(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{και} \quad f_p(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Ελέγξτε ότι αν ορίσουμε έτσι τις f_a και f_p τότε η f_a είναι άρτια, η f_p είναι περιττή και $f = f_a + f_p$. Η μοναδικότητα της αναπαράστασης έχει ήδη αποδειχθεί (γιατί;).

13. *Μια συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *λέγεται* ***περιοδική (με περίοδο*** a***)*** *αν υπάρχει* $a \neq 0$ *στο* $\mathbb{R}$ *ώστε* $f(x + a) = f(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

(α) *Δείξτε ότι η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *που ορίζεται από την* $f(x) = [x]$ *δεν είναι περιοδική.*

(β) *Εξετάστε αν η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *που ορίζεται από την* $f(x) = x - [x]$ *είναι περιοδική.*

Υπόδειξη. (α) Ας υποθέσουμε ότι η $f(x) = [x]$ είναι περιοδική με περίοδο a. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a > 0$ (αν η f έχει περίοδο a τότε έχει και περίοδο $-a$). Παρατηρήστε ότι $f(\mathbb{R}) = f([0, a))$. Πράγματι, κάθε $x \in \mathbb{R}$ γράφεται στη μορφή $x = m_x a + y_x$ για κάποιους $m_x \in \mathbb{Z}$ και $y_x \in [0, a)$, οπότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = f(m_x a + y_x) = f(y_x) \in f([0, a))$.

Όμως, $f([0, a)) \subseteq [0, a)$: αν $0 \leq x < a$ τότε $0 \leq [x] \leq x < a$. Άρα, η f είναι φραγμένη. Αυτό είναι άτοπο, αφού $f(n) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = x - [x]$ είναι περιοδική με περίοδο 1. Αρκεί να δείξουμε ότι $[x+1] = [x]+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως, $[x] \leq x < [x]+1$ άρα $[x]+1 \leq x+1 < ([x]+1)+1$. Δηλαδή, ο ακέραιος $m = [x]+1$ ικανοποιεί την $m \leq x+1 < m+1$. Άρα, $[x]+1 = m = [x+1]$ (από τη μοναδικότητα του ακεραίου μέρους).

14. *Έστω $n \in \mathbb{N}$.*
(α) *Δείξτε ότι η συνάρτηση*

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx]$$

είναι περιοδική με περίοδο $1/n$. Δηλαδή, $f\big(x + \frac{1}{n}\big) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) *Υπολογίστε την τιμή $f(x)$ όταν $0 \leq x < 1/n$.*
(γ) *Δείξτε την ταυτότητα*

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι, από την Άσκηση 9(β),

$$\begin{aligned}
f\big(x + \frac{1}{n}\big) &= \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n}\right] + \left[x + \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\right] - \left[n\big(x + \frac{1}{n}\big)\right] \\
&= \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + [x+1] - [nx+1] \\
&= \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + [x] + 1 - [nx] - 1 \\
&= [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx] \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

(β) Αν $0 \leq x < 1/n$ τότε

$$x,\ x + \frac{1}{n},\ \ldots,\ x + \frac{n-1}{n},\ nx \in [0,1)$$

άρα

$$[x] = \left[x + \frac{1}{n}\right] = \cdots = \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx] = 0.$$

Έπεται ότι $f(x) = 0$.
(γ) Κάθε $x \in \mathbb{R}$ γράφεται στη μορφή $x = m_x \cdot \frac{1}{n} + y_x$ για κάποιους $m_x \in \mathbb{Z}$ και $y_x \in [0, 1/n)$, οπότε, από τα (α) και (β), για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = f\big(m_x \cdot \frac{1}{n} + y_x\big) = f(y_x) = 0$.

15. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι*

(α) *$f(0)=0$ και $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.*

(β) *Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ ισχύει*

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n).$$

(γ) *$f(\frac{1}{n})=\frac{f(1)}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

(δ) *Υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $f(q)=\lambda q$ για κάθε $q\in\mathbb{Q}$.*

Υπόδειξη. Έχουμε υποθέσει ότι η f ικανοποιεί την $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

(α) Παίρνοντας $x=y=0$ μπορείτε να ελέγξετε ότι $f(0)=0$. Κατόπιν, για δοσμένο $x\in\mathbb{R}$, παίρνοντας $y=-x$ μπορείτε να ελέγξετε ότι $f(-x)=-f(x)$.

(β) Χρησιμοποιήστε επαγωγή.

(γ) Πάρτε $x_1=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$ στο (β).

(δ) Γράψτε τον q στη μορφή $\pm\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ – για κατάλληλο πλήθος προσθετέων – και χρησιμοποιήστε τα (β) και (γ).

16. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(y)-f(x)\le(y-x)^2$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.*

Υπόδειξη: Αν $|f(b)-f(a)|=\delta>0$ για κάποια $a<b$ στο $\mathbb{R}$, διαιρέστε το διάστημα $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα, όπου n αρκετά μεγάλος φυσικός αριθμός.

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για τυχόντες πραγματικούς αριθμούς a και b με $a<b$ ισχύει $f(a)=f(b)$ (εξηγήστε γιατί). Ας υποθέσουμε ότι $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ και $|f(b)-f(a)|=\delta>0$.

Χωρίζουμε το $[a,b]$ σε n διαδοχικά υποδιαστήματα μήκους $(b-a)/n$ με τα σημεία $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, όπου $x_k=a+\frac{k(b-a)}{n}$, $k=0,1,\ldots,n$. Παρατηρούμε ότι, από την υπόθεση,

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le(x_k-x_{k-1})^2=\left(\frac{b-a}{n}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{n^2}$$

για κάθε $k=1,\ldots,n$. Από την τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή έχουμε

$$\begin{aligned}\delta &= |f(b)-f(a)|=|f(x_n)-f(x_0)|\\ &\le |f(x_n)-f(x_{n-1})|+\cdots+|f(x_2)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_0)|\\ &\le n\cdot\frac{(b-a)^2}{n^2}=\frac{(b-a)^2}{n}.\end{aligned}$$

Δηλαδή, $\delta\le(b-a)^2/n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο αφού $\delta>0$ και $\frac{(b-a)^2}{n}\to 0$ όταν το $n\to\infty$.

Κεφάλαιο 4

Συνέχεια και όρια συναρτήσεων

Α. Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. *Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)=1$, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε: για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει $f(x)>\frac{4}{5}$.*

Σωστό. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας με $\varepsilon=\frac{1}{5}>0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta>0$ ώστε: για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{5},\ \text{δηλαδή}\ |f(x)-1|<\frac{1}{5}.$$

Συνεπώς, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει $\frac{4}{5}=1-\frac{1}{5}<f(x)<1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$.

2. *Η $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής.*

Σωστό. Όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της f είναι μεμονωμένα σημεία του, άρα η f είναι συνεχής σε αυτά. Το επιχείρημα είναι το εξής: έστω $m\in\mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $\delta=\frac{1}{2}$. Αν $n\in\mathbb{N}$ και $|n-m|<\frac{1}{2}$, τότε, αναγκαστικά, $n=m$. Συνεπώς,

$$|f(n)-f(m)|=|f(m)-f(m)|=0<\varepsilon.$$

3. *Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από τις: $f(x)=0$ αν $x\in\mathbb{N}$ και $f(x)=1$ αν $x\notin\mathbb{N}$, είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $x_0\notin\mathbb{N}$.*

Σωστό. Αν $x_0 \notin \mathbb{N}$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να μην περιέχεται φυσικός αριθμός (εξηγήστε γιατί). Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$. Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0.

Έστω τώρα $x_0 \in \mathbb{N}$. Υπάρχει ακολουθία (x_n) η οποία συγκλίνει στο x_0 και η οποία δεν έχει όρους που να είναι φυσικοί αριθμοί (εξηγήστε γιατί). Τότε, $f(x_n) = 1 \to 1 \neq 0 = f(x_0)$. Σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

4. *Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.*

Σωστό. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που παίρνει την τιμή 1 στα σημεία $0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και την τιμή 0 σε όλα τα άλλα σημεία.

5. *Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.*

Σωστό. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $f(x) = x$ αν $x = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και $f(x) = 0$ σε όλα τα άλλα σημεία. Για να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο 0 χρησιμοποιήστε τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας.

6. *Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.*

Σωστό. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -x$ αν $x \notin \mathbb{Q}$.

7. *Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο x, τότε είναι συνεχής σε κάθε x.*

Λάθος. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \neq 4$ και $f(4) = 1$. Η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 4$ και συνεχής σε κάθε άρρητο x.

8. *Αν η f είναι συνεχής στο (a, b) και $f(q) = 0$ για κάθε ρητό $q \in (a, b)$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.*

Σωστό. Θεωρήστε $x \in (a, b)$ και ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών από το (a, b) η οποία συγκλίνει στο x. Τέτοια ακολουθία υπάρχει λόγω της πυκνότητας των ρητών στο $\mathbb{R}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι $f(q_n) \to f(x)$. Από την υπόθεση έχουμε $f(q_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και συνεπώς, $f(x) = 0$.

9. *Αν $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η f είναι ασυνεχής στο σημείο 0.*

Σωστό. Έχουμε $\frac{1}{2n} \to 0$ και $\frac{1}{2n-1} \to 0$. Από την υπόθεση, $f\left(\frac{1}{2n}\right) = (-1)^{2n} = 1 \to 1$ και $f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = (-1)^{2n-1} = -1 \to -1$. Από την αρχή της μεταφοράς, η f είναι ασυνεχής στο σημείο 0.

10. *Αν η* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και* $f(0) = -f(1)$ *τότε υπάρχει* $x_0 \in [0,1]$ *ώστε* $f(x_0) = 0$.

Σωστό. Αν $f(0) = 0$ τότε παίρνουμε $x_0 = 0$ ή 1. Αν $f(0) \neq 0$, τότε από την $f(0) = -f(1)$ βλέπουμε ότι η f παίρνει ετερόσημες τιμές στα άκρα του $[0,1]$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

11. *Αν η* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής, τότε η* f *παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο* (a,b).

Λάθος. Θεωρήστε την $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$. Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$, όμως δεν παίρνει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0,1)$.

12. *Αν η* f *είναι συνεχής στο* $[a,b]$ *τότε η* f *είναι φραγμένη στο* $[a,b]$.

Σωστό. Ένα από τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα.

13. *Αν* $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ *τότε* $\lim_{x\to 0} g(x) \sin \frac{1}{x} = 0$.

Σωστό. Χρησιμοποιήστε, για παράδειγμα, την αρχή της μεταφοράς. Αν $x_n \neq 0$ και $x_n \to 0$, τότε

$$\left| g(x_n) \sin \frac{1}{x_n} \right| \leq |g(x_n)|.$$

Αφού $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, έχουμε $g(x_n) \to 0$. Από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι

$$\lim_{x\to 0} g(x_n) \sin \frac{1}{x_n} = 0.$$

Ασκήσεις: συνέχεια συναρτήσεων – Ομάδα Α′

1. *Έστω* $f : X \to \mathbb{R}$ *και έστω* $x_0 \in X$. *Αν η* f *είναι συνεχής στο* x_0 *και* $f(x_0) \neq 0$, *δείξτε ότι:*

(α) *αν* $f(x_0) > 0$, *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε: αν* $|x - x_0| < \delta$ *και* $x \in X$ *τότε* $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$.

(β) *αν* $f(x_0) < 0$, *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε: αν* $|x - x_0| < \delta$ *και* $x \in X$ *τότε* $f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0$.

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $f(x_0) > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, αν θεωρήσουμε τον $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in X$ και $|x - x_0| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) \Rightarrow 0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x).$$

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι $f(x_0) < 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, αν θεωρήσουμε τον $\varepsilon = -\frac{f(x_0)}{2} > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in X$ και $|x - x_0| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(x_0)| < -\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x) - f(x_0) < -\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0.$$

2. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M \geq 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$, για κάθε $x \in X$ και $y \in X$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.*

Υπόδειξη. Αν $M = 0$ τότε η f είναι σταθερή (γιατί;). Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $M > 0$.

Έστω $x_0 \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/M > 0$. Αν $x \in X$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| < M\delta = \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

3. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

(α) *Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.*

(β) *Δώστε παράδειγμα μιας τέτοιας f που να είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $|f(0)| \leq 0$, δηλαδή $f(0) = 0$. Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \to 0$. Τότε, από την $-x_n \leq f(x_n) \leq x_n$ και το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $f(x_n) \to 0 = f(0)$. Από την αρχή της μεταφοράς η f είναι συνεχής στο 0.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x & , x \notin \mathbb{Q} \\ -x & , x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$ είναι συνεχής μόνο στο σημείο 0 (εξηγήστε γιατί) και ικανοποιεί την $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $g(0) = 0$ και $|f(x)| \leq |g(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $|f(0)| \leq |g(0)| = 0$, δηλαδή $f(0) = 0$. Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \to 0$. Αφού η g είναι συνεχής στο 0, έχουμε $g(x_n) \to 0$. Από την υπόθεση έχουμε $-g(x_n) \leq f(x_n) \leq g(x_n)$, άρα $f(x_n) \to 0 = f(0)$. Από την αρχή της μεταφοράς η f είναι συνεχής στο 0.

5. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $a_1 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $a_{n+1} = f(a_n)$ για $n = 1, 2, \ldots$. Αν $a_n \to a \in \mathbb{R}$ τότε $f(a) = a$.*

Υπόδειξη. Από την $a_n \to a$ και από την αρχή της μεταφοράς, έχουμε $f(a_n) \to f(a)$. Από την υπόθεση, $f(a_n) = a_{n+1} \to a$. Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας, $f(a) = a$.

6. *Δείξτε ότι η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *είναι συνεχής μόνο στα σημεία* $-1, 0, 1$.

Υπόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Υπάρχει ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών με $q_n \to x_0$ και υπάρχει ακολουθία (α_n) αρρήτων αριθμών με $\alpha_n \to x_0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 έχουμε $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = x_0$ και $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^3 = x_0^3$. Άρα, $x_0 = x_0^3$. Αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο αν $x_0 = -1, 0$ ή 1. Δηλαδή, η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \notin \{-1, 0, 1\}$.

Ας υποθέσουμε ότι $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$. Τότε, αν θεωρήσουμε τις συνεχείς συναρτήσεις $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x$ και $h(x) = x^3$, έχουμε $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: αν $|x - x_0| < \delta_1$ τότε $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. Αφού η h είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε: αν $|x - x_0| < \delta_2$ τότε $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Αν $|x - x_0| < \delta$, τότε:

(i) είτε $x \in \mathbb{Q}$ και $|x - x_0| < \delta \leq \delta_1$, οπότε $|f(x) - f(x_0)| = |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$,

(ii) ή $x \notin \mathbb{Q}$ και $|x - x_0| < \delta \leq \delta_2$, οπότε $|f(x) - f(x_0)| = |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$.

Σε κάθε περίπτωση, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο x_0.

7. *Έστω* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν* $f(x) = 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{Q}$*, τότε* $f(y) = 0$ *για κάθε* $y \in \mathbb{R}$.

(β) *Αν* $f(x) = g(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{Q}$*, τότε* $f(y) = g(y)$ *για κάθε* $y \in \mathbb{R}$.

(γ) *Αν* $f(x) \leq g(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{Q}$*, τότε* $f(y) \leq g(y)$ *για κάθε* $y \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη.(α) Έστω $y \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) ρητών αριθμών με $x_n \to y$. Αφού η f είναι συνεχής, από την αρχή της μεταφοράς έχουμε $0 = f(x_n) \to f(y)$. Άρα, $f(y) = 0$.

(β) Εφαρμόστε το (α) για την συνεχή συνάρτηση $h = f - g$.

(γ) Έστω $y \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) ρητών αριθμών με $x_n \to y$. Από την υπόθεση έχουμε $f(x_n) \leq g(x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(y).$$

8. *Έστω* $f : [a, b] \to [a, b]$ *συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι υπάρχει* $x \in [a, b]$ *με* $f(x) = x$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $g(x) = f(x) - x$. Παρατηρήστε ότι $g(a) = f(a) - a \geq 0$ και $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Αφού $g(a)g(b) \leq 0$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in [a,b]$ ώστε $f(x) - x = g(x) = 0$.

9. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $|f(x)| = 1$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.*

Υπόδειξη. Η f μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές -1 και 1. Αν δεν είναι σταθερή, τότε υπάρχουν $x_1 \in [a,b]$ ώστε $f(x_1) = -1$ και $x_2 \in [a,b]$ ώστε $f(x_2) = 1$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, η f παίρνει τότε όλες τις τιμές $\rho \in [-1,1]$. Για παράδειγμα, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = 0$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο, αφού $|f(\xi)| = 1$ από την υπόθεση.

10. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι $g \equiv f$ ή $g \equiv -f$ στο $[a,b]$.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι αφού η f δεν μηδενίζεται σε κανένα $x \in [a,b]$ το ίδιο ισχύει και για την g.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(a) > 0$. Τότε έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ (αν η f έπαιρνε κάπου αρνητική τιμή τότε, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, θα υπήρχε και σημείο στο οποίο θα μηδενιζόταν).

Ας υποθέσουμε ότι $g(a) > 0$. Όπως πριν, έχουμε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αφού $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε x, συμπεραίνουμε ότι $g(x) = f(x)$ για κάθε x. Δηλαδή, $g = f$.

Ελέγξτε την περίπτωση $f(a) > 0$ και $g(a) < 0$ με τον ίδιο τρόπο. Σε αυτή την περίπτωση από την $f^2 = g^2$ θα προκύψει ότι $g = -f$.

11. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.*

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[0,1]$. Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση, τότε $m < M$ (γιατί;). Γνωρίζουμε ότι υπάρχει άρρητος α ώστε $m < \alpha < M$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in (0,1)$ με $f(x) = \alpha$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι η f παίρνει μόνο ρητές τιμές.

12. *Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: $f(x) = x^2$ για κάθε ρητό $x \in (0,1)$. Να βρεθεί το $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι $f(t) = t^2$ για κάθε $t \in (0,1)$. Ειδικότερα, θα έχουμε $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Έστω λοιπόν $t \in (0,1)$. Υπάρχει ακολουθία (q_n) ρητών στο $(0,1)$ με $q_n \to t$. Αφού $f(q_n) = q_n^2$ και η f είναι συνεχής στο t, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} q_n^2 = t^2.$$

13. *Έστω $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in [0,1]$ με $f(x+1) = f(x)$.*

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - f(x+1)$. Η g είναι καλά ορισμένη και συνεχής στο $[0,1]$. Παρατηρήστε ότι

$$g(0) = f(0) - f(1) = f(2) - f(1) = -g(1),$$

άρα $g(0)g(1) \leq 0$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in [0,1]$ ώστε

$$f(x) - f(x+1) = g(x) = 0.$$

14. *Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0) = f(1)$. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ ώστε $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.*

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g : \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. Η g είναι καλά ορισμένη και συνεχής στο $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$. Παρατηρήστε ότι

$$g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f(0) - f(1) = 0.$$

Άρα, υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ώστε $g\left(\frac{\kappa}{n}\right) \leq 0$ και $g\left(\frac{\lambda}{n}\right) \geq 0$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει x που ανήκει στο κλειστό διάστημα που έχει άκρα τα $\frac{\kappa}{n}$ και $\frac{\lambda}{n}$ και ικανοποιεί την $f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) = g(x) = 0$.

15. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2 \in [a,b]$. Δείξτε ότι για κάθε $t \in [0,1]$ υπάρχει $y_t \in [a,b]$ ώστε*

$$f(y_t) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[a,b]$. Για $i = 1, 2$ έχουμε $m \leq f(x_i) \leq M$, άρα

$$m = tm + (1-t)m \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \leq tM + (1-t)M = M.$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $y_t \in [a,b]$ με $f(y_t) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

16. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $y \in [a,b]$ ώστε*

$$f(y) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[a,b]$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έχουμε $m \leq f(x_i) \leq M$, άρα

$$m \leq \alpha := \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq M.$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $y \in [a,b]$ με $f(y) = \alpha$.

17. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $f(x) \geq \xi$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

Ισχύει το συμπέρασμα αν αντικαταστήσουμε το διάστημα $[a,b]$ με το διάστημα $(a,b]$;

Υπόδειξη. Η f παίρνει ελάχιστη τιμή $f(x_0) > 0$ σε κάποιο $x_0 \in [a,b]$. Αν θέσουμε $\xi = f(x_0)$, τότε $\xi > 0$ και $f(x) \geq f(x_0) = \xi$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Αν αντικαταστήσουμε το $[a,b]$ με το $(a,b]$ τότε το συμπέρασμα παύει να ισχύει. Παράδειγμα: η $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ είναι συνεχής και $f(x) = x > 0$ για κάθε $x \in (0,1]$. Όμως, $\inf\{f(x) : x \in (0,1]\} = \inf(0,1] = 0$. Άρα, για κάθε $\xi > 0$ υπάρχει $x \in (0,1]$ ώστε $f(x) = x < \xi$.

18. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $f(x) > g(x) + \rho$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνεχή συνάρτηση $f - g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Η $f - g$ παίρνει ελάχιστη τιμή m σε κάποιο $y \in [a,b]$. Από την υπόθεση έχουμε $m = (f-g)(y) = f(y) - g(y) > 0$. Αν θέσουμε $\rho = \frac{m}{2}$, τότε $\rho > 0$ και για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε $f(x) - g(x) \geq m > \rho$.

19. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε σημείο του $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $y \in [a,b]$ ώστε $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) = 0$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν μηδενίζεται στο $[a,b]$. Τότε, $|f(t)| > 0$ για κάθε $t \in [a,b]$. Η συνεχής συνάρτηση $|f|$ παίρνει ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in [a,b]$ ώστε

$$|f(t)| \geq |f(x)| > 0 \quad \text{για κάθε } t \in [a,b].$$

Όμως, από την υπόθεση, υπάρχει $y \in [a,b]$ ώστε

$$0 < |f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)| \leq \frac{1}{2}|f(y)|.$$

Δηλαδή, $|f(y)| < 0$, το οποίο είναι άτοπο.

20. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι $\max(f) < \max(g)$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε $t \in [a,b]$ με $f(t) = \max(f)$. Τότε,

$$\max(f) = f(t) < g(t) \leq \max(g),$$

δηλαδή $\max(f) < \max(g)$.

21. *Έστω $f, g : [a,b] \to [c,d]$ συνεχείς και επί συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.*

Υπόδειξη. Αφού οι f, g είναι επί του $[c,d]$, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ ώστε $f(x_1) = d = g(x_2)$. Τότε, για τη συνάρτηση $h = f - g$ έχουμε

$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = d - g(x_1) \geq 0$$

και

$$h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - d \leq 0.$$

Από την $h(x_1)h(x_2) \leq 0$ και από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $h(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) = g(\xi)$.

22. *Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$. Δείξτε ότι η εξίσωση*

$$\frac{\alpha}{x-\lambda} + \frac{\beta}{x-\mu} + \frac{\gamma}{x-\nu} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν).

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$g(x) = \alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu) = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν). Η g είναι συνεχής στο $[\lambda, \mu]$ και στο $[\mu, \nu]$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu) > 0, \\ g(\mu) &= \beta(\mu-\lambda)(\mu-\nu) < 0, \\ g(\nu) &= \gamma(\nu-\lambda)(\nu-\mu) > 0. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (\lambda, \mu)$ ώστε $g(\xi_1) = 0$ και υπάρχει $\xi_2 \in (\mu, \nu)$ ώστε $g(\xi_2) = 0$.

Ασκήσεις: όρια συναρτήσεων – Ομάδα Α′

23. *Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δείξτε ότι*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right) = \frac{a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \in (-1,1)$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1 &= \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} - 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \left(\left(1 - \sqrt{1+x}\right) + \left(1 - \sqrt{1-x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \left(\frac{-x}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\right). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>1$, $1+\sqrt{1+x}>1$ και $1+\sqrt{1-x}>1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}-1\right| &\leq \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\left(\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{|x|}{1+\sqrt{1-x}}\right)\\ &\leq 2|x|.\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon>0$. Αν $0<|x|<\delta=\varepsilon/2$ τότε $\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}-1\right|<\varepsilon$. Άρα, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$.

(β) Έστω $x>\max\{-a,0\}$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)-\frac{a}{2} &= \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}-\frac{a}{2}\\ &= \frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+a}\right)\\ &= -\frac{a^2}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})^2}.\end{aligned}$$

Αφού $(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})^2>x$, έχουμε

$$\left|\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)-\frac{a}{2}\right|\leq\frac{a^2}{2x}.$$

Έστω $\varepsilon>0$. Αν $x>M=a^2/(2\varepsilon)>0$ τότε $\left|\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)-\frac{a}{2}\right|<\varepsilon$. Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)=\frac{a}{2}.$$

24. *Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια και, αν ναι, υπολογίστε τα.*

(α) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$, (β) $\lim\limits_{x\to x_0}[x]$, (γ) $\lim\limits_{x\to x_0}(x-[x])$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $\frac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4$ για κάθε $x\neq 2$. Αν (x_n) είναι μια ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n\neq 2$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x_n\to 2$, τότε $x_n^2+2x_n+4\to 2^2+2\cdot 2+4=12$. Από την αρχή της μεταφοράς, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=12$.

(β) Αν $x_0\notin\mathbb{Z}$, τότε $[x_0]<x_0<[x_0]+1$, άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε $[x_0]<x_0-\delta<x_0+\delta<[x_0]+1$. Τότε, η $f(x)=[x]$ είναι σταθερή και ίση με $[x_0]$ σε μια περιοχή του x_0 (εξηγήστε γιατί), άρα $\lim\limits_{x\to x_0}[x]=[x_0]$. Αν $x_0\in\mathbb{Z}$, τότε για κάθε $x\in(x_0-1,x_0)$ έχουμε $f(x)=[x]=x_0-1$ ενώ για κάθε $x\in(x_0,x_0+1)$ έχουμε $f(x)=[x]=x_0$. Άρα, $\lim\limits_{x\to x_0^-}[x]=x_0-1\neq x_0=\lim\limits_{x\to x_0^+}[x]$. Έπεται ότι το $\lim\limits_{x\to x_0}[x]$ δεν υπάρχει.

(γ) Από το (β), αν $x_0 \notin \mathbb{Z}$ τότε $\lim_{x\to x_0}(x-[x]) = \lim_{x\to x_0} x - \lim_{x\to x_0}[x] = x_0 - [x_0]$. Αν $x_0 \in \mathbb{Z}$ τότε το $\lim_{x\to x_0}(x-[x])$ δεν υπάρχει, γιατί τότε θα υπήρχε και το $\lim_{x\to x_0}[x]$ (εξηγήστε γιατί).

25. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -x & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ και ότι αν $x_0 \neq 0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.*

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την $|f(x)| = |x|$ και τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό, δείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων δείξτε, με βάση την αρχή της μεταφοράς, ότι αν $x_0 \neq 0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

26. *Εξετάστε αν είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις:*

(α) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

(β) $f_k:[-1,0]\to\mathbb{R}$ με $f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $(k = 0,1,2,\ldots)$

(γ) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Υπόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι $\sin x \leq x \leq \tan x$, άρα $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ για $x \in (0,\pi/2)$. Αν (x_n) είναι μια ακολουθία θετικών αριθμών με $x_n \to 0$, τότε $\cos x_n \to \cos 0 = 1$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $f(x_n) = \frac{\sin x_n}{x_n} \to 1 \neq f(0)$. Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. Η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \neq 0$.
(β) Η f είναι ασυνεχής στο 0 αν $k = 0$: δοκιμάστε την ακολουθία $x_n = -\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$. Η f είναι συνεχής στο 0 αν $k \geq 1$: παρατηρήστε ότι $|f(x)| \leq |x|^k \leq |x|$ για κάθε $x \in [-1,0]$.
(γ) Η f δεν είναι συνεχής στο σημείο 0: για την ακολουθία $x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}$ έχουμε $x_n \to 0$ και $f(x_n) = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to +\infty$. Η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \neq 0$.

27. *Δείξτε ότι αν $a, b > 0$ τότε*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a} \quad \textit{και} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] = 0.$$

Τι γίνεται όταν $x \to 0^-$;

Υπόδειξη. (α) Έστω $x > 0$. Παρατηρήστε ότι $\frac{b}{x} - 1 < \left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{x}$ και $\frac{x}{a} > 0$, άρα

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{a}.$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{b}{a}-\frac{x}{a}\right)=\frac{b}{a}$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]=\frac{b}{a}$.

Για το δεύτερο όριο, παρατηρήστε ότι αν $0<x<a$ τότε $\left[\frac{x}{a}\right]=0$. Άρα, $\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]=0$ για κάθε $x\in(0,a)$. Έπεται ότι $\lim_{x\to 0^+}\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]=0$.

(β)Έστω $x<0$. Παρατηρήστε ότι $\frac{b}{x}-1<\left[\frac{b}{x}\right]\leq\frac{b}{x}$ και $\frac{x}{a}<0$, άρα

$$\frac{b}{a}-\frac{x}{a}>\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]\geq\frac{b}{a}.$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{b}{a}-\frac{x}{a}\right)=\frac{b}{a}$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]=\frac{b}{a}$.

Για το δεύτερο όριο, παρατηρήστε ότι αν $-a<x<0$ τότε $-1<\frac{x}{a}<0$, άρα $\left[\frac{x}{a}\right]=-1$. Συνεπώς, $\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]=-\frac{b}{x}$ για κάθε $x\in(-a,0)$. Έπεται ότι $\lim_{x\to 0^-}\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]=+\infty$.

28. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=1$ αν $x\in\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ και 0 αλλιώς. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.*

Υπόδειξη. Το όριο δεν υπάρχει. Οι ακολουθίες $a_n=\frac{1}{n}$ και $b_n=\frac{\sqrt{2}}{n}$ συγκλίνουν στο 0. Έχουμε $f(a_n)=1\to 1$ και $f(b_n)=0\to 0$. Αν υπήρχε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ell$, από την αρχή της μεταφοράς θα είχαμε $f(a_n)\to\ell$ και $f(b_n)\to\ell$, δηλαδή $1=\ell=0$, το οποίο είναι άτοπο.

29. *Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.*

(α) *Δείξτε ότι αν $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.*

(β) *Δώστε ένα παράδειγμα όπου $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ενώ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\alpha$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\beta$. Θεωρήστε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ με $x_n\neq x_0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x_n\to x_0$. Τότε, $f(x_n)\leq g(x_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $f(x_n)\to\alpha$ και $g(x_n)\to\beta$. Άρα, $\alpha\leq\beta$.

(β) Θεωρήστε τη συνάρτηση f που ορίζεται από την $f(x)=0$ και τη συνάρτηση g που ορίζεται από τις $g(x)=x^2$ αν $x\neq 0$ και $g(0)=5$. Τότε, $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αλλά $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ (εξηγήστε γιατί).

30. *Έστω $X\subset\mathbb{R}$, $f,g:X\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και έστω $x_0\in\mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap X$ και ότι $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχουν $\delta>0$ και $M>0$ ώστε: αν $x\in X$ και $|x-x_0|<\delta$ τότε $|f(x)|\leq M$. Θεωρήστε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο X με $x_n\neq x_0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x_n\to x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n)g(x_n)\to 0$, οπότε το ζητούμενο προκύπτει από την αρχή της μεταφοράς.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση έχουμε $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0$, άρα υπάρχει $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $|g(x_n)| < \frac{\varepsilon}{M}$ για κάθε $n \geq n_1$. Αφού $x_n \to x_0$, υπάρχει $n_2(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: $|x_n - x_0| < \delta$ για κάθε $n \geq n_2$. Άρα, $|f(x_n)| \leq M$ για κάθε $n \geq n_2$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|f(x_n)g(x_n)| = |f(x_n)| \cdot |g(x_n)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $f(x_n)g(x_n) \to 0$.

31. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.*

Υπόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = x + nT$. Τότε, $x_n \to +\infty$ και $f(x_n) = f(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Άρα $f(x) = b$. Το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι σταθερή: $f(x) = b$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

32. *Έστω $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο με την ιδιότητα $a_0 a_m < 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει θετική πραγματική ρίζα.*

Υπόδειξη. Έστω $x > 0$. Γράφουμε $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 = a_m x^m (1 + \Delta(x))$ όπου

$$\Delta(x) = \frac{a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{a_m x^m}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \Delta(x) = 0,$$

άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$1 + \Delta(x) > 0$$

για κάθε $x \geq M$. Ειδικότερα, οι $P(M)$ και a_m έχουν το ίδιο πρόσημο (εξηγήστε γιατί). Χρησιμοποιώντας και την $P(0) = a_0$, βλέπουμε ότι ο $P(M)P(0)$ είναι ομόσημος με τον $a_0 a_m$, δηλαδή αρνητικός. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\rho \in (0, M)$ ώστε $P(\rho) = 0$.

33. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο: υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 για τον οποίο*

$$f(x_0) = x_0.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι φθίνουσα, για κάθε $x > 0$ έχουμε $f(x) - x \leq f(0) - x$ και $\lim_{x\to+\infty} (f(0) - x) = -\infty$. Άρα, υπάρχει $x_1 > 0$ ώστε $f(x_1) - x_1 < 0$.

Όμοια, για κάθε $x<0$ έχουμε $f(x)-x\geq f(0)-x$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(0)-x)=+\infty$. Άρα, υπάρχει $x_2<0$ ώστε $f(x_2)-x_2>0$.

Αφού η f είναι συνεχής, εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για την $f(x)-x$ στο διάστημα $[x_2,x_1]$ βρίσκουμε $x_0\in(x_2,x_1)$ ώστε $f(x_0)-x_0=0$, δηλαδή $f(x_0)=x_0$.

Για τη μοναδικότητα, παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $f(x)-x$ είναι γνησίως φθίνουσα, και συνεπώς, έχει το πολύ μία ρίζα.

34. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και*

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $y\in\mathbb{R}$ ώστε $f(y)\geq f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $\varepsilon=f(0)>0$. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, υπάρχει $M>0$ ώστε: για κάθε $x>M$ ισχύει $0<f(x)<f(0)$. Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, υπάρχει $N>0$ ώστε: για κάθε $x<-N$ ισχύει $0<f(x)<f(0)$.

Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-N,M]$. Άρα, υπάρχει $y\in[-N,M]$ με την ιδιότητα: για κάθε $x\in[-N,M]$ ισχύει $f(x)\leq f(y)$. Ειδικότερα, αφού $-N<0<M$ έχουμε $f(0)\leq f(y)$.

Μπορούμε τώρα εύκολα να δούμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο y. Θεωρήστε τυχόν $x\in\mathbb{R}$ και διακρίνετε τις περιπτώσεις $x<-N$, $x\in[-N,M]$ και $x>M$.

35. (α) *Έστω $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\geq 0$ δείξτε ότι η g διατηρεί πρόσημο: ή $g(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$ ή $g(x)<0$ για κάθε $x\geq 0$.*

(β) *Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x)\neq x$ για κάθε $x\geq 0$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.*

Υπόδειξη. (α) Αφού $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\geq 0$, αν η g δεν διατηρεί πρόσημο, θα υπάρχουν $x_1,x_2\geq 0$ ώστε $g(x_1)<0$ και $g(x_2)>0$. Όμως τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μπορούμε να βρούμε ξ ανάμεσα στα x_1 και x_2 για το οποίο $g(\xi)=0$. Έτσι οδηγούμαστε σε άτοπο (από την υπόθεση έχουμε $g(\xi)\neq 0$).

(β) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-x$. Από την υπόθεση έχουμε $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\geq 0$. Από το (α), η g διατηρεί πρόσημο. Αφού $g(0)=f(0)>0$, συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$. Συνεπώς, $f(x)>x$ για κάθε $x\geq 0$. Έπεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

36. *Υποθέτουμε ότι η $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0\in[a,+\infty)$ με $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in[a,+\infty)$.

Υπόδειξη. Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει $M > a$ ώστε $f(x) > f(a)$ για κάθε $x > M$.

Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, M]$, άρα υπάρχει $x_0 \in [a, M]$ ώστε $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [a, M]$. Τότε, έχουμε επίσης

$$f(x) > f(a) \geq f(x_0)$$

(η δεύτερη ανισότητα ισχύει διότι $a \in [a, M]$).

Έπεται ότι $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.

37. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$, τότε η f παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.*

Υπόδειξη. Αν η f είναι σταθερή και $f(x) = \alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f παίρνει προφανώς μέγιστη και ελάχιστη τιμή (την α). Αλλιώς, είτε υπάρχει x_1 ώστε $f(x_1) > \alpha$ ή υπάρχει x_2 ώστε $f(x_2) < \alpha$ (μπορεί φυσικά να συμβαίνουν και τα δύο).

Με την υπόθεση ότι υπάρχει x_1 ώστε $f(x_1) > \alpha$, θα δείξουμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή. Θέτουμε $\varepsilon = f(x_1) - \alpha > 0$. Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$, υπάρχει $M > \max\{0, x_1\}$ ώστε: για κάθε $x > M$ ισχύει $f(x) < \alpha + \varepsilon = f(x_1)$. Αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$, υπάρχει $N > 0$ ώστε $-N < x_1$ και για κάθε $x < -N$ να ισχύει $f(x) < \alpha + \varepsilon = f(x_1)$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-N, M]$. Άρα, υπάρχει $y \in [-N, M]$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in [-N, M]$ ισχύει $f(x) \leq f(y)$. Ειδικότερα, αφού $-N < x_1 < M$ έχουμε $f(x_1) \leq f(y)$. Μπορούμε τώρα εύκολα να δούμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο y. Θεωρήστε τυχόν $x \in \mathbb{R}$ και διακρίνετε τις περιπτώσεις $x < -N$, $x \in [-N, M]$ και $x > M$.

Με την υπόθεση ότι υπάρχει x_2 ώστε $f(x_2) < \alpha$, δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή.

38. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Ο εγκλεισμός $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ είναι προφανής. Θα δείξουμε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $y = f(x)$, οπότε $\mathbb{R} \subseteq f(\mathbb{R})$.

Έστω $y \in \mathbb{R}$. Αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $x_1 < 0$ και $f(x_1) < y$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει $x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $x_2 > 0$ και $f(x_2) > y$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $f(x_1) < y < f(x_2)$ και η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in (x_1, x_2)$ ώστε $f(x) = y$.

39. *Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση γνησίως αύξουσα και συνεχής. Δείξτε ότι*

$$f((\alpha, \beta)) = (\lim_{x\to\alpha^+} f(x), \lim_{x\to\beta^-} f(x)).$$

Υπόδειξη. Αφού η $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, γνωρίζουμε ότι το $f((\alpha, \beta))$ είναι ένα διάστημα J το οποίο περιέχει το (γ, δ), όπου $\gamma = \inf_{\alpha<x<\beta} f(x)$ και $\delta = \sup_{\alpha<x<\beta} f(x)$.

Δείξτε πρώτα ότι $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \gamma$ και $\lim_{x\to\beta^-} f(x) = \delta$. Για παράδειγμα, η πρώτη ισότητα έπεται από τα εξής:

1. Αν $\alpha < x < \beta$ τότε $f(x) \geq \gamma$, άρα $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \geq \gamma$.

2. Αν $\alpha < y < \beta$, τότε για κάθε $x \in (\alpha, y)$ έχουμε $f(x) < f(y)$, άρα $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \leq f(y)$. Δηλαδή, το $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ είναι κάτω φράγμα του $\{f(y) : \alpha < y < \beta\}$, οπότε $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \leq \gamma$.

Μένει να δείξουμε ότι το $f((\alpha,\beta))$ δεν περιέχει τα γ και δ (αν αυτά είναι πεπερασμένα). Αυτό όμως είναι συνέπεια του ότι η f είναι γνησίως αύξουσα: για παράδειγμα, αν $\gamma = f(x)$ για κάποιο $x \in (\alpha,\beta)$ τότε παίρνοντας τυχόν $\alpha < z < x$ θα είχαμε $f(z) < f(x) = \gamma$, που είναι άτοπο αφού ο γ είναι κάτω φράγμα του $f((\alpha,\beta))$.

Ασκήσεις: συνέχεια και όρια συναρτήσεων – Ομάδα Β′

40. *Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha x$ προφανώς ικανοποιεί την $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.*

Αντίστροφα, δείξτε ότι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση με $f(1) = \alpha$, η οποία ικανοποιεί την $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, τότε:

(α) $f(n) = n\alpha$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

(β) $f(\frac{1}{m}) = \frac{\alpha}{m}$ *για κάθε* $m = 1, 2, \ldots$.

(γ) $f(x) = \alpha x$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Έχουμε υποθέσει ότι η f ικανοποιεί την $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Παίρνοντας $x = y = 0$ μπορείτε να ελέγξετε ότι $f(0) = 0$. Κατόπιν, για δοσμένο $x \in \mathbb{R}$, παίρνοντας $y = -x$ μπορείτε να ελέγξετε ότι $f(-x) = -f(x)$.

(α) Χρησιμοποιώντας επαγωγή δείχνουμε ότι

$$(*) \qquad f(x_1 + \cdots + x_m) = f(x_1) + \cdots + f(x_m)$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$. Παίρνοντας $m = n$ και $x_1 = \cdots = x_n = 1$ βλέπουμε ότι $f(n) = n\alpha$.

(β) Πάρτε $x_1 = \cdots = x_m = \frac{1}{m}$ στην $(*)$.

(γ) Θεωρήστε πρώτα $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. Γράψτε τον q στη μορφή $\pm\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ – για κατάλληλο πλήθος προσθετέων – και χρησιμοποιήστε το (β) για να δείξετε ότι $f(q) = \alpha q$. Αν $q < 0$ το ζητούμενο έπεται από την $f(-x) = -f(x)$.

Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε ακολουθία ρητών αριθμών $q_n \to x$. Αφού η f είναι συνεχής, από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} (\alpha q_n) = \alpha x.$$

41. *Μελετήστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *με*

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,\ x\notin\mathbb{Q} \text{ ή } x=0\\ \\ \frac{1}{q} & ,\ x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p,q)=1.\end{cases}$$

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν ο $x\in(0,1]$ είναι ρητός, οπότε γράφεται στη μορφή $x=\frac{p}{q}$ όπου $p,q\in\mathbb{N}$ με ΜΚΔ$(p,q)=1$, τότε η f είναι ασυνεχής στο σημείο x. Πράγματι, υπάρχει ακολουθία αρρήτων αριθμών $\alpha_n\in[0,1]$ με $\alpha_n\to x$. Τότε, $f(\alpha_n)=0\to 0\neq\frac{1}{q}=f(x)$, και το συμπέρασμα έπεται από την αρχή της μεταφοράς.

Έστω τώρα ότι ο $x\in[0,1]$ είναι άρρητος και έστω $\varepsilon>0$. Θέτουμε $M=M(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ και $A(\varepsilon)=\{y\in[0,1]:f(y)\geq\varepsilon\}$. Αν ο y ανήκει στο $A(\varepsilon)$ τότε είναι ρητός ο οποίος γράφεται στη μορφή $x=\frac{p}{q}$ όπου $p,q\in\mathbb{N}$, $p\leq q$ και $f(y)=\frac{1}{q}\geq\varepsilon$. Το πλήθος αυτών των αριθμών είναι το πολύ ίσο με το πλήθος των ζευγαριών (p,q) φυσικών αριθμών όπου $q\leq M$ και $p\leq q$. Επομένως, δεν ξεπερνάει τον $M(M+1)/2$. Δηλαδή, το $A(\varepsilon)$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $A(\varepsilon)=\{y_1,\ldots,y_m\}$ όπου $m=m(\varepsilon)\in\mathbb{N}$.

Αφού ο x είναι άρρητος, ο x δεν ανήκει στο $A(\varepsilon)$. Άρα, ο αριθμός $\delta=\min\{|x-y_1|,\ldots,|x-y_m|\}$ είναι γνήσια θετικός. Έστω $z\in[0,1]$ με $|z-x|<\delta$. Τότε, $z\notin A(\varepsilon)$ άρα $f(z)<\varepsilon$. Αφού $f(x)=0$, έπεται ότι $0\leq f(z)=f(z)-f(x)<\varepsilon$. Το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι συνεχής στο σημείο x.

Τέλος, δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο 0.

42. *Έστω* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *Υποθέτουμε ότι η* f *είναι συνεχής στο* 0 *και ότι* $f(x/2)=f(x)$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$. *Δείξτε ότι η* f *είναι σταθερή.*

Υπόδειξη. Έστω $x\neq 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση (και με επαγωγή) δείχνουμε ότι

$$f(x)=f(x/2)=f(x/2^2)=\cdots=f(x/2^n)$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έχουμε $\frac{x}{2^n}\to 0$ και η f είναι συνεχής στο 0. Από την αρχή της μεταφοράς, $f(x/2^n)\to f(0)$. Αφού $f(x)=f(x/2^n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η ακολουθία $(f(x/2^n))$ είναι σταθερή, με όλους τους όρους της ίσους με $f(x)$. Έπεται ότι $f(x)=f(0)$ και, αφού το $x\neq 0$ ήταν τυχόν, η f είναι σταθερή.

43. *Έστω* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση με* $f(\frac{m}{2^n})=0$ *για κάθε* $m\in\mathbb{Z}$ *και* $n\in\mathbb{N}$. *Δείξτε ότι* $f(x)=0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Έστω $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ο ακέραιος $m_n=[2^nx]$ ικανοποιεί την $m_n\leq 2^nx<m_n+1$. Άρα,

$$\frac{m_n}{2^n}\leq\frac{2^nx}{2^n}=x<\frac{m_n+1}{2^n}=\frac{m_n}{2^n}+\frac{1}{2^n}.$$

Δηλαδή, $x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m_n}{2^n}$. Από την αρχή της μεταφοράς,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{m_n}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}0=0.$$

44. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και κάθε $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έπεται ότι $f(0)=f\left(\frac{m}{n}\right)$ για κάθε $m\in\mathbb{Z}$ και κάθε $n\in\mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Έστω $x\in\mathbb{R}$. Αν $m_n(x)=[nx]$, τότε $m_n(x)\in\mathbb{Z}$ και $m_n(x)\leq nx< m_n(x)+1$. Άρα,

$$\frac{m_n(x)}{n}\leq x<\frac{m_n(x)}{n}+\frac{1}{n}.$$

Παρατηρήστε ότι $f\left(\frac{m_n(x)}{n}\right)=f(0)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και ότι $x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m_n(x)}{n}$. Από τη συνέχεια της f στο σημείο x συμπεραίνουμε ότι

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{m_n(x)}{n}\right)=f(0).$$

Το x ήταν τυχόν, άρα η f είναι σταθερή.

45. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $A=\{x\in[a,b]:f(x)=0\}$. Αν $A\neq\emptyset$, δείξτε ότι $\sup A\in A$ και $\inf A\in A$.*

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n\to\sup A$. Η f είναι συνεχής, άρα $f(x_n)\to f(\sup A)$ από την αρχή της μεταφοράς. Όμως $x_n\in A$, άρα $f(x_n)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι $f(\sup A)=0$, δηλαδή $\sup A\in A$.

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $\inf A\in A$.

46. *Έστω $a\in[0,\pi]$. Ορίζουμε ακολουθία με $a_1=a$ και $a_{n+1}=\sin(a_n)$. Δείξτε ότι $a_n\to 0$.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα με επαγωγή ότι $a_n\in[0,\pi]$ για κάθε $n\geq 1$. Τότε, από την ανισότητα $0\leq\sin x\leq x$ που ισχύει για $x\in[0,\pi]$, έχουμε ότι, για κάθε $n\geq 1$, $a_{n+1}=\sin(a_n)\leq a_n$. Δηλαδή, η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0. Έπεται ότι η (a_n) συγκλίνει σε κάποιο $x\in[0,\pi]$. Από την αναδρομική σχέση βλέπουμε ότι, αφού $a_{n+1}\to x$ και $\sin(a_n)\to\sin x$, το x ικανοποιεί την εξίσωση $\sin x=x$. Αφού $x\in[0,\pi]$, αναγκαστικά ισχύει $x=0$ (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή, $a_n\to 0$.

47. *Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n\in[0,1]$ ώστε $f(x_n)\to 0$. Τότε, υπάρχει $x_0\in[0,1]$ ώστε $f(x_0)=0$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν μηδενίζεται στο $[a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $|f(x)|\geq\varepsilon$ για κάθε $x\in[a,b]$ (χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η $|f|$ παίρνει ελάχιστη τιμή). Από την υπόθεση όμως, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $[0,1]$ ώστε $f(x_n)\to 0$. Για όλους τελικά τους $n\in\mathbb{N}$ πρέπει να ισχύει $|f(x_n)|<\varepsilon$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

48. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T>0$: δηλαδή, $f(x+T)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=f(x+\sqrt{2})$.*

Υπόδειξη. Η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο κλειστό διάστημα $[0,T]$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0,T]$ ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [0,T]$. Αφού η f είναι περιοδική με περίοδο T, μπορούμε να ελέγξουμε ότι η ανισότητα

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $x + kT \in [0,T]$, και από την περιοδικότητα της f, $f(x) = f(x+kT)$).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - f(x+\sqrt{2})$. Τότε, $g(x_1) = f(x_1) - f(x_1+\sqrt{2}) \leq 0$ και $g(x_2) = f(x_2) - f(x_2+\sqrt{2}) \geq 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, βρίσκουμε x ανάμεσα στα x_1 και x_2 ώστε $g(x) = 0$, δηλαδή $f(x) = f(x+\sqrt{2})$.

49. *Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a < b$ και ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[0,+\infty)$ με $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ και $f(x_n) \to a$, $f(y_n) \to b$. Δείξτε ότι: για κάθε $c \in (a,b)$ υπάρχει ακολουθία (z_n) στο $[0,+\infty)$ με $z_n \to +\infty$ και $f(z_n) \to c$.*

Υπόδειξη. Έστω $c \in (a,b)$. Αφού $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ και $f(x_n) \to a$, $f(y_n) \to b$, μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (k_n) ώστε:

$$(*) \qquad x_{k_n} > n,\ y_{k_n} > n \text{ και } f(x_{k_n}) < c < f(y_{k_n}).$$

Δείξτε το επαγωγικά. Για το επαγωγικό βήμα παρατηρήστε ότι όλοι τελικά οι όροι των $(x_m), (y_m)$ ικανοποιούν καθεμιά από τις $x_m > n+1$, $y_m > n+1$, $f(x_m) < c < f(y_m)$ (εξηγήστε γιατί) άρα υπάρχει $k_{n+1} > k_n$ ώστε να ισχύουν όλες μαζί για τους $x_{k_{n+1}}, y_{k_{n+1}}$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, βρίσκουμε z_n ανάμεσα στα x_{k_n} και y_{k_n} ώστε $f(z_n) = c$. Επιπλέον, αφού $x_{k_n}, y_{k_n} > n$, έχουμε $z_n > n$. Συνεπώς, $z_n \to +\infty$ και $f(z_n) = c \to c$.

50. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a,b)$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) σημείων του (a,b) με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Υπόδειξη. ($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε μονότονη ακολουθία $y_n \in (a,b)$ ώστε $y_n \to x_0$ και $|f(y_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Αυτό δικαιολογείται ως εξής: αν έχουμε βρει τον x_n, παρατηρούμε ότι αναγκαστικά $x_n \neq x_0$ και επιλέγουμε x_{n+1} ώστε $|x_{n+1} - x_0| < |x_n - x_0|$, $|x_{n+1} - x_0| < \frac{1}{n+1}$ και $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. Τότε, η ακολουθία $(|x_n - x_0|)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στο 0. Αν άπειροι όροι της (x_n) είναι μικρότεροι από τον x_0, η ακολουθία (y_n) αυτών των όρων είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο x_0, οπότε ικανοποιεί τον ισχυρισμό. Αν όχι, υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι μεγαλύτεροι από τον x_0 και η ακολουθία που σχηματίζουν είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στον x_0.

Τέλος, από την $|f(y_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ έχουμε $f(y_n) \not\to f(x_0)$. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση.

Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) προκύπτει άμεσα από την αρχή της μεταφοράς.

51. (α) *Έστω $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_{n\to\infty} f(a+t_n) = L$ για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία (t_n) με $t_n \to 0$, τότε $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.*

(β) *Σωστό ή λάθος; Έστω $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_{n\to\infty} f\left(a+\frac{1}{n}\right) = L$ τότε $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.*

Υπόδειξη. (α) Με απαγωγή σε άτοπο: αν δεν ισχύει η $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in (a,+\infty)$ με $a < x < a+\delta$ και $|f(x)-L| \geq \varepsilon$. Εφαρμόζοντας το παραπάνω με $\delta = 1$ βρίσκουμε $x_1 \in (a,+\infty)$ με $a < x_1 < a+1$ και $|f(x_1)-L| \geq \varepsilon$. Εφαρμόζοντας το παραπάνω με $\delta = \min\{1/2, x_1 - a\}$ βρίσκουμε $x_2 < x_1$ με $a < x_2 < a+\frac{1}{2}$ και $|f(x_2)-L| \geq \varepsilon$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, ορίζουμε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $t_n = x_n - a$ με $t_n \to 0$ και $|f(a+t_n)-L| \geq \varepsilon$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) *Λάθος*. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ που παίρνει την τιμή 1 στα σημεία $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και την τιμή 0 σε όλα τα άλλα σημεία. Το $\lim_{n\to\infty} f(1/n) = 1$, όμως το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει.

52. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in (a,b)$. Δείξτε ότι το $f(x_0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του $f([a,b])$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία (x_n) στο (a,b) με $x_n \to x_0$. Τέτοια ακολουθία υπάρχει, διότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του (a,b). Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $f(x_n) < f(x_0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και αφού η f είναι συνεχής στο x_0, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$. Η ακολουθία $(f(x_n))$ έχει όρους στο $f([a,b])$, όλοι της οι όροι είναι διαφορετικοί από το $f(x_0)$ και $f(x_n) \to f(x_0)$. Από τον ακολουθιακό χαρακτηρισμό του σημείου συσσώρευσης συνόλου, το $f(x_0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του $f([a,b])$.

53. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $|f(x)-f(y)| \geq |x-y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι επί.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, αν $f(x) = f(y)$ έχουμε $0 = |f(x)-f(y)| \geq |x-y|$, άρα $x = y$. Δηλαδή, η f είναι 1-1. Έπεται ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Τότε, αν $x > 0$ έχουμε $f(x) - f(0) = |f(x)-f(0)| \geq x$, δηλαδή

$$f(x) \geq f(0) + x, \ x > 0.$$

Όμοια, αν $x < 0$ έχουμε $f(0) - f(x) = |f(x)-f(0)| \geq |x| = -x$, δηλαδή

$$f(x) \leq f(0) + x, \ x < 0.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \text{ και } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Στην Άσκηση 38 δείξαμε ότι αυτό έχει ως συνέπεια το ότι η f είναι επί.

54. *Εστω $f, g : [0,1] \to [0,1]$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα και $g \circ f = f \circ g$. Δείξτε ότι οι f και g έχουν κοινό σταθερό σημείο: υπάρχει $y \in [0,1]$ ώστε $f(y) = y$ και $g(y) = y$.* **Υπόδειξη:** *Ξέρουμε ότι υπάρχει $x_1 \in [0,1]$ με $g(x_1) = x_1$. Αν ισχύει και η $f(x_1) = x_1$, έχουμε τελειώσει. Αν όχι, θεωρήστε την ακολουθία $x_{n+1} = f(x_n)$, δείξτε ότι είναι μονότονη και ότι όλοι οι όροι της είναι σταθερά σημεία της g. Το όριό της θα είναι κοινό σταθερό σημείο των f και g (γιατί;).*

Υπόδειξη. Από το θεώρημα σταθερού σημείου (δείτε και την Άσκηση 8) γνωρίζουμε ότι υπάρχει $x_1 \in [0,1]$ ώστε $g(x_1) = x_1$. Ορίζουμε αναδρομικά μια ακολουθία (x_n) στο $[0,1]$ θέτοντας $x_{n+1} = f(x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι $g(x_n) = x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, αυτό ισχύει για $n = 1$ και αν $g(x_m) = x_m$ τότε, χρησιμοποιώντας την $f\circ g = g\circ f$ έχουμε

$$g(x_{m+1}) = g(f(x_m)) = (g \circ f)(x_m) = (f \circ g)(x_m) = f(g(x_m)) = f(x_m) = x_{m+1}.$$

Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f(x_n) = x_n$ τότε το x_n είναι κοινό σταθερό σημείο των f και g.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x_{n+1} = f(x_n) \neq x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, $x_2 = f(x_1) \neq x_1$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_2 > x_1$ (αν $x_2 < x_1$ δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο). Τότε, $x_3 = f(x_2) > f(x_1) = x_2$ (γιατί η f είναι αύξουσα και έχουμε υποθέσει ότι $x_{n+1} \neq x_n$ για κάθε n). Επαγωγικά δείχνουμε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα. Αφού $x_n \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $x_n \to x_0$ για κάποιο $x_0 \in [0,1]$. Η συνέχεια της f στο x_0 δείχνει ότι

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0.$$

Από την άλλη πλευρά, η συνέχεια της g στο x_0 δείχνει ότι

$$g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Άρα, το x_0 είναι κοινό σταθερό σημείο των f και g.

55. *Εστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_0 \in [a,b]$ υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Τότε, η f είναι φραγμένη.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε $x_0 \in [a,b]$ υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Άρα, υπάρχουν $\delta_{x_0} > 0$ και $M_{x_0} > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M_{x_0}$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta_{x_0}, x + \delta_{x-0}) \cap [a,b]$

(εφαρμόστε τον ορισμό του ορίου με $\varepsilon = 1$). Τώρα, μπορείτε να μιμηθείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1.

Για τις επόμενες δύο ασκήσεις δίνουμε τον εξής ορισμό: Έστω $f : X \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα, τοπικό ελάχιστο) στο $x_0 \in X$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει η ανισότητα $f(x) \leq f(x_0)$ (αντίστοιχα, $f(x_0) \leq f(x)$).

56. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σε κανένα σημείο του (a, b). Δείξτε ότι η f είναι μονότονη στο (a, b).*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $[c, d] \subseteq [a, b]$ και $c < x < d$ τότε το $f(x)$ ανήκει στο κλειστό διάστημα που έχει άκρα τα $f(c)$ και $f(d)$. Για το σκοπό αυτό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(c) \leq f(d)$ (στην αντίθετη περίπτωση, δουλεύουμε ανάλογα). Η f παίρνει μέγιστη τιμή στο $[c, d]$ σε κάποιο σημείο x_0. Αν $f(x_0) > f(d)$ τότε $c < x_0 < d$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [c, d]$. Τότε, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, δηλαδή η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0. Αυτό είναι άτοπο, άρα η μέγιστη τιμή της f στο $[c, d]$ είναι η $f(d)$. Όμοια, η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο $[c, d]$ σε κάποιο σημείο x_1. Αν $f(x_1) < f(c)$ τότε $c < x_1 < d$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_1 - \delta, x_1 + \delta) \subset [c, d]$. Τότε, για κάθε $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ έχουμε $f(x) \geq f(x_1)$, δηλαδή η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_1. Αυτό είναι άτοπο, άρα η ελάχιστη τιμή της f στο $[c, d]$ είναι η $f(c)$. Δηλαδή, για κάθε $x \in [c, d]$ έχουμε

$$(*) \qquad f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι η f είναι μονότονη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(a) \leq f(b)$ (στην αντίθετη περίπτωση, δουλεύουμε ανάλογα). Θα δείξουμε ότι η f είναι αύξουσα. Έστω $a < x < y < b$. Εφαρμόζοντας την $(*)$ για την τριάδα a, x, b έχουμε $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Εφαρμόζοντας την $(*)$ για την τριάδα x, y, b έχουμε $f(x) \leq f(y) \leq f(b)$. Άρα, για κάθε $x < y$ στο (a, b) έχουμε $f(x) \leq f(y)$. Έπεται ότι η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$. Μπορούμε μάλιστα να δούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Αν υπήρχαν $x < y$ στο $[a, b]$ με $f(x) = f(y)$ τότε η f θα ήταν σταθερή στο $[x, y]$. Όμως τότε, η f θα είχε τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο σε *κάθε* $z \in (x, y)$.

57. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν η f έχει τοπικό μέγιστο σε δύο διαφορετικά σημεία x_1, x_2 του $[a, b]$, τότε υπάρχει x_3 ανάμεσα στα x_1, x_2 στο οποίο η f έχει τοπικό ελάχιστο.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο σε δύο σημεία $x_1 < x_2$ του $[a, b]$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, άρα υπάρχει $x_3 \in [x_1, x_2]$ με την ιδιότητα: $f(x_3) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(α) $x_1 < x_3 < x_2$: Τότε, αν πάρουμε $\delta = \min\{x_3 - x_1, x_2 - x_3\} > 0$ έχουμε $(x_3 - \delta, x_3 + \delta) \subset [x_1, x_2] \subseteq [a, b]$ και $f(x_3) \leq f(x)$ για κάθε $x \in (x_3 - \delta, x_3 + \delta)$. Άρα, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_3.

(β) $x_1 = x_3$: Τότε, υπάρχει $0 < \delta_1 < x_2 - x_1$ ώστε $f(x) \leq f(x_3) = f(x_1)$ για κάθε $x_1 < x < x_1 + \delta_1$ (γιατί η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_1) και υπάρχει $0 < \delta_2 < x_2 - x_1$ ώστε $f(x) \geq f(x_3) = f(x_1)$ για κάθε $x_1 < x < x_1 + \delta_2$ (γιατί η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_3 = x_1$). Έπεται ότι: αν θέσουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ τότε η f είναι σταθερή στο $(x_1, x_1 + \delta)$. Άρα, η f έχει τοπικό ελάχιστο σε κάθε σημείο του $(x_1, x_1 + \delta)$.

(γ) $x_2 = x_3$: Όμοια με το (β).

Κεφάλαιο 5

Παράγωγος

Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε η f είναι συνεχής στο (a,b).*

Σωστό. Έστω $x \in (a,b)$. Από την υπόθεση, η f είναι παραγωγίσιμη στο x, άρα είναι συνεχής στο x.

2. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και αν $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n) = 0$.*

Σωστό. Αφού $f(0) = f'(0) = 0$, έχουμε

$$0 = f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Από την αρχή της μεταφοράς για το όριο, αν $x_n \neq 0$ και $x_n \to 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 0$. Θεωρώντας την ακολουθία $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, παίρνουμε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(1/n)}{1/n} = 0$.

3. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.*

Λάθος. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = 0$, όμως $f'(x) = -1$ για κάθε $x \in [0,1]$, άρα $f'(0) = -1 \neq 0$.

4. *Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,\infty)$ και $f(0) = 0$, τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,\infty)$.*

Σωστό. Έστω $x > 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο $[0, x]$: υπάρχει $\xi_x \in (0, x)$ ώστε
$$f(x) = f(x) - f(0) = xf'(\xi_x).$$
Αφού $x > 0$ και $f'(\xi_x) \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) \geq 0$.

Για $x = 0$, έχουμε $f(x) = f(0) = 0$.

5. *Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ και $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ ώστε $f''(x_0) = 0$.*

Σωστό. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την f στα $[0, 1]$ και $[1, 2]$, βρίσκουμε $y_1 \in (0, 1)$ με $f'(y_1) = 0$ και $y_2 \in (1, 2)$ με $f'(y_2) = 0$. Εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα Rolle για την f' στο $[y_1, y_2]$, βρίσκουμε $x_0 \in (y_1, y_2)$ με $f''(x_0) = 0$. Τέλος, $0 < y_1 < x_0 < y_2 < 2$, δηλαδή $x_0 \in (0, 2)$.

6. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in (a, b)$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ και αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x_0) = \ell$.*

Σωστό. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < |y - x_0| < \delta$, τότε $|f'(y) - \ell| < \varepsilon$. Έστω $x \in (a, b)$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$. Από τις υποθέσεις μας έπεται ότι f είναι συνεχής στο $[x_0, x]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, x), οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x_0, x]$, βρίσκουμε $y_x \in (x_0, x)$ ώστε $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(y_x)$. Όμως, $0 < |y_x - x_0| < |x - x_0| < \delta$, άρα $|f'(y_x) - \ell| < \varepsilon$. Συνεπώς,
$$(*) \qquad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell \right| = |f'(y_x) - \ell| < \varepsilon.$$
Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και η $(*)$ ισχύει για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι το όριο από αριστερά ισούται με ℓ, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και $f'(x_0) = \ell$.

7. *Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$.*

Λάθος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -x^2$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$, άρα δεν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$. Όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0: έχουμε
$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{|x^2|}{|x|} = |x| \to 0 \quad \text{όταν } x \to 0,$$
άρα $f'(0) = 0$.

8. *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Λάθος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \cos\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ (εξηγήστε γιατί). Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $\delta > 0$, η f είναι αύξουσα στο $(0, \delta)$. Τότε, $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, \delta)$. Δηλαδή, $\frac{1}{2} + 2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} \geq 0$ για κάθε $x \in (0, \delta)$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $x_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} < \delta$ και παρατηρούμε ότι $f'(x_n) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2\pi n + \pi/2}\cos(2\pi n + \pi/2) - \sin(2\pi n + \pi/2) = -\frac{1}{2} < 0$, άτοπο.

Ασκήσεις – Ομάδα Α΄

1. *Υπολογίστε τις παραγώγους (στα σημεία που υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων:*

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \qquad g(x) = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}}, \qquad h(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

2. *Υπολογίστε τις παραγώγους (στα σημεία που υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων:*

$$f(x) = \sin\big((x+1)^2(x+2)\big), \qquad g(x) = \frac{\sin(x^2)\sin^2 x}{1+\sin x}, \qquad h(x) = \sin\left(\frac{\cos x}{x}\right).$$

3. *Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες στο 0.*

(α) $f(x) = x$ *αν* $x \notin \mathbb{Q}$ *και* $f(x) = 0$ *αν* $x \in \mathbb{Q}$.

(β) $g(x) = 0$ *αν* $x \notin \mathbb{Q}$ *και* $g(x) = x^2$ *αν* $x \in \mathbb{Q}$.

(γ) $h(x) = \sin x$ *αν* $x \notin \mathbb{Q}$ *και* $h(x) = x$ *αν* $x \in \mathbb{Q}$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_1(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Έχουμε $f_1(x) = 1$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $f_1(x) = 0$ αν $x \in \mathbb{Q}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f_1(x)$.

Όμως αυτό το όριο δεν υπάρχει: αν (q_n) είναι μια ακολουθία ρητών αριθμών ώστε $q_n \neq 0$ και $q_n \to 0$, τότε $f_1(q_n) = 0 \to 0$. Αν (α_n) είναι μια ακολουθία αρρήτων αριθμών ώστε $\alpha_n \to 0$, τότε $f_1(\alpha_n) = 1 \to 1$. Αφού $\lim_{n\to\infty} f(q_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n)$, από την αρχή της μεταφοράς βλέπουμε ότι το $\lim_{x\to 0} f_1(x)$ δεν υπάρχει. Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_1(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{g(x)}{x}$, $x \neq 0$. Έχουμε $g_1(x) = 0$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $g_1(x) = x$ αν $x \in \mathbb{Q}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} g_1(x)$.

Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0} g_1(x) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$|g_1(x)| \leq |x|$$

για κάθε $x \neq 0$. Πράγματι, αν $x \notin \mathbb{Q}$ έχουμε $|g_1(x)| = 0 \leq |x|$, ενώ αν $x \in \mathbb{Q}$ έχουμε $|g_1(x)| = |x|$.

Επιλέγουμε $\delta = \varepsilon$. Τότε, αν $0 < |x| < \delta$ έχουμε $|g_1(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\lim_{x\to 0} g_1(x) = 0$.

Άρα, η g είναι παραγωγίσιμη στο 0, και $g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} g_1(x) = 0$.

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h_1(x) = \frac{h(x)-h(0)}{x} = \frac{h(x)}{x}$, $x \neq 0$. Έχουμε $h_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $h_1(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} h_1(x)$.

Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0} h_1(x) = 1$. Έστω $\varepsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in \mathbb{R}$ και $0 < |x| < \delta$, τότε $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$. Θα δείξουμε ότι:

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \text{ και } 0 < |x| < \delta, \text{ τότε } |h_1(x) - 1| < \varepsilon.$$

Πράγματι, αν $x \notin \mathbb{Q}$ έχουμε $|h_1(x) - 1| = \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$, ενώ αν $x \in \mathbb{Q}$ έχουμε $|h_1(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$.

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\lim_{x\to 0} h_1(x) = 0$. Άρα, η h είναι παραγωγίσιμη στο 0, και $h'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0} h_1(x) = 0$.

4. *Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν είναι, εξετάστε αν η παράγωγός τους είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

(α) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *αν* $x \neq 0$, *και* $f(0) = 0$.

(β) $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *αν* $x \neq 0$, *και* $g(0) = 0$.

(γ) $h(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *αν* $x \neq 0$, *και* $h(0) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \neq 0$ και $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Για την παράγωγο στο 0 εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο της

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

καθώς το $x \to 0$. Αν ορίσουμε $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, τότε $x_n \to 0$ αλλά $\frac{f(x_n)}{x_n} = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \to +\infty$. Άρα, η f δεν παραγωγίζεται στο 0.

(β) Η g είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \neq 0$ και $g'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Για την παράγωγο στο 0 εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο της

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{g(x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

καθώς το $x \to 0$. Αν ορίσουμε $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, τότε $x_n \to 0$ και $\frac{g(x_n)}{x_n} = 1 \to 1$. Αν ορίσουμε $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, τότε $x_n \to 0$ και $\frac{g(x_n)}{x_n} = 0 \to 0$. Έπεται ότι το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x}$ δεν υπάρχει, άρα η g δεν παραγωγίζεται στο 0.

(γ) Η h είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \neq 0$ και $h'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Για την παράγωγο στο 0 εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο της

$$\frac{h(x)-h(0)}{x} = \frac{h(x)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

καθώς το $x \to 0$. Παρατηρήστε ότι $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$. Αν λοιπόν μας δώσουν $\varepsilon > 0$ τότε, επιλέγοντας $\delta = \varepsilon > 0$ έχουμε

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{h(x)-h(0)}{x} - 0\right| \leq |x| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, η h παραγωγίζεται στο 0, και $h'(0) = 0$. Η h' είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$, δεν είναι όμως συνεχής στο 0: για να το δείξετε, παρατηρήστε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

5. *Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.*

Υπόδειξη. Αν $x \neq 0$, τότε

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

Για την παράγωγο στο 0, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_1(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = -\frac{x - \sin x}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = 0$. Αφού η f_1 είναι περιττή, έπεται ότι

$$\lim_{x\to 0^-} f_1(x) = -\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = 0,$$

άρα

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f_1(x) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ για $0 < x < \pi/2$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} 0 < \frac{x-\sin x}{x^2} &< \frac{\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} - 1}{x} = \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\frac{1-\cos x}{x} \\ &= \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2\frac{x}{2} \to 1\cdot 1\cdot 1^2\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

όταν $x \to 0$. Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = 0$.

Η f' είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$. Για να δείξουμε ότι f' είναι συνεχής στο 0 αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 0$. Χρησιμοποιώντας την $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ για $0 < x < \pi/2$, παίρνουμε

$$0 > \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} > -\sin x\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sin x \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 \frac{\sin x}{2} \to 0$$

όταν $x \to 0$. Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. Η f' είναι περιττή, άρα $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Δηλαδή, η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

6. *Βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία στα οποία είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση* $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ *με*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & , \quad x = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}\,(p,q) = 1 \end{cases}$$

Υπόδειξη. Αν $x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ τότε η f είναι ασυνεχής στο x, άρα δεν υπάρχει η $f'(x)$.

Έστω $x \in (0,1)$ ο οποίος είναι άρρητος. Η f είναι συνεχής στο x, και $f(x) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω (α_n) ακολουθία αρρήτων αριθμών στο $(0,1)$, ώστε $\alpha_n \neq x$ και $\alpha_n \to x$. Τότε, από την αρχή της μεταφοράς,

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\alpha_n) - f(x)}{\alpha_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{0-0}{\alpha_n - x} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n}$ για κάθε $n \geq n_0$ (εξηγήστε γιατί). Για κάθε $n \geq n_0$, υπάρχει μοναδικός $m_n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{m_n}{n} < x < \frac{m_n+1}{n} < 1$. Παρατηρήστε ότι

$$f\left(\frac{m_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \quad \text{και} \quad f\left(\frac{m_n+1}{n}\right) \geq \frac{1}{n}.$$

Επίσης, τουλάχιστον ένας από τους $\frac{m_n+1}{n} - x$, $x - \frac{m_n}{n}$ είναι μικρότερος ή ίσος από $\frac{1}{2n}$ (το άθροισμά τους είναι ίσο με $\frac{1}{n}$). Άρα, θέτοντας $x_n = \frac{m_n}{n}$ ή $x_n = \frac{m_n+1}{n}$, έχουμε $x_n \neq x$, $x_n \to x$ και

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}\right| = \left|\frac{f(x_n)}{x_n - x}\right| \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{|x_n - x|} \geq \frac{1}{n} \cdot (2n) = 2.$$

Τότε, από την αρχή της μεταφοράς,

$$0 = |f'(x)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}\right| \geq 2,$$

το οποίο είναι άτοπο.

7. *Έστω* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με* $f(0) = 3$ *και* $f'(x) = \sin^2(\sin(x+1))$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$. *Υπολογίστε την* $(f^{-1})'(3)$.

8. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Υπολογίστε την $(f^{-1})'(y)$ στα σημεία $f(0)$, $f(1)$ και $f(-1)$.*

9. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και $a < x_0 < b$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^\rho$ για κάθε $x \in (a, b)$.*

(α) *Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.*

(β) *Αν $\rho > 1$, δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Ποια είναι η τιμή της $f'(x_0)$;*

(γ) *Δώστε παράδειγμα όπου $\rho = 1$ αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\rho} > 0$. Αν $x \in (a, b)$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε

$$|f(x) - f(x_0)|^\rho \leq M|x - x_0|^\rho < M\delta^\rho = \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

(β) Έστω $x \in (a, b)$ με $x \neq x_0$. Παρατηρήστε ότι

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - 0\right| = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq M|x - x_0|^{\rho - 1}.$$

Αφού $\rho > 1$, έχουμε $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0|^{\rho-1} = 0$. Έπεται ότι $f'(0) = 0$.

(γ) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $f(x) = |x|$. Τότε, $|f(x) - f(0)| = |x - 0|$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Όμως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

10. *Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ η οποία:*

(α) *είναι συνεχής στο $(0, 1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.*

(β) *είναι συνεχής στο $(0, 1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$.*

Υπόδειξη. (α) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $0 < x < 1/2$ και $f(x) = 1 - x$ αν $1/2 \leq x < 1$.

(β) Ορίστε την f σε κάθε διάστημα της μορφής $\left(\frac{1}{n+1/2}, \frac{1}{n-1/2}\right)$ μιμούμενοι το (α): η f να παίρνει την τιμή 0 στα $\frac{1}{n+1/2}, \frac{1}{n-1/2}$, την τιμή 1 στο σημείο $\frac{1}{n}$, και να είναι γραμμική στα δύο διαστήματα $\left(\frac{1}{n+1/2}, \frac{1}{n}\right)$ και $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1/2}\right)$.

11. *Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:*

(α) *$f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) > 0$.*

(β) *$f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) < 0$.*

(γ) *$f(0) = 0$, $f(3) = 1$, $f'(1) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$.*

(δ) *$f(m) = 0$ και $f'(m) = (-1)^m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. (α) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) > 0$: Θεωρήστε την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x+1}{3}$ (τη γραμμική συνάρτηση με $f(-1) = 0$ και $f(2) = 1$). Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{3} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα, $f'(1) > 0$.

(β) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) < 0$: Θεωρήστε συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ζητάμε: $f(-1) = a - b + c = 0$ και $f(2) = 4a + 2b + c = 1$, άρα $c = \frac{1}{3} - 2a$ και $b = \frac{1}{3} - a$. Επίσης, $f'(x) = 2ax + b$, άρα

$$f'(1) = 2a + b = a + \frac{1}{3} < 0 \quad \text{αν } a < -\frac{1}{3}.$$

Τώρα, μπορούμε να επιλέξουμε: $a = -\frac{2}{3}$, $b = 1$, $c = \frac{5}{3}$. Ελέγξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x + \frac{5}{3}$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

(γ) $f(0) = 0$, $f(3) = 1$, $f'(1) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$: Το τυπικό παράδειγμα γνησίως αύξουσας παραγωγίσιμης συνάρτησης που η παράγωγός της μηδενίζεται σε ένα σημείο είναι η $g(x) = x^3$. Θεωρήστε συνάρτηση της μορφής $f(x) = a(x-1)^3 + b$. Ζητάμε: $f(0) = -a + b = 0$, άρα $b = a$. Επίσης, $f(3) = 8a + a = 1$, άρα $a = \frac{1}{9}$. Ελέγξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-1)^3+1}{9}$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

(δ) $f(m) = 0$ και $f'(m) = (-1)^m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = a\sin(\pi x)$. Τότε, $f(m) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και $f'(m) = \pi a \cos(\pi m) = (-1)^m \pi a$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε $a = \frac{1}{\pi}$ ώστε να ικανοποιούνται οι δύο πρώτες συνθήκες. Τότε,

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right| \leq \frac{1}{\pi} \leq \frac{1}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $\pi > 2$. Δηλαδή, ικανοποιείται και η τρίτη συνθήκη.

12. *Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι: $f(x_0) = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.*

Υπόδειξη. Για $x \neq x_0$ γράφουμε

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x)}{x - x_0} = \frac{f(x)}{x - x_0}g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x),$$

χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $f(x_0) = 0$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0)g(x_0)$$

όταν $x \to x_0$, συνεπώς η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)$.

13. *Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο διάστημα που υποδεικνύεται.*
(α) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ *στο* $[-2, 2]$.
(β) $f(x) = x^5 + x + 1$ *στο* $[-1, 1]$.
(γ) $f(x) = x^3 - 3x$ *στο* $[-1, 2]$.

Υπόδειξη. (α) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ στο $[-2, 2]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$. Οι ρίζες της παραγώγου είναι: $x_1 = 2$ και $x_2 = -\frac{4}{3}$. Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο $(-2, 2)$ είναι το x_2. Υπολογίζουμε τις τιμές

$$f(-2) = 5, \quad f(2) = -11, \quad f(-4/3) = 203/27.$$

Έπεται ότι $\max(f) = 203/27$ και $\min(f) = -11$.

(β) $f(x) = x^5 + x + 1$ στο $[-1, 1]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, δηλαδή η f δεν έχει κρίσιμα σημεία. Υπολογίζουμε τις τιμές $f(-1) = -1$ και $f(1) = 3$. Έπεται ότι $\max(f) = 3$ και $\min(f) = -1$.

(γ) $f(x) = x^3 - 3x$ στο $[-1, 2]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$, με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 3$. Τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος είναι τα $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$. Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο $(-1, 2)$ είναι το x_2. Υπολογίζουμε τις τιμές

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(2) = 2.$$

Έπεται ότι $\max(f) = 2$ και $\min(f) = -2$.

14. *Δείξτε ότι η εξίσωση:*
(α) $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ *έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο* $(0, 1)$.
(β) $6x^4 - 7x + 1 = 0$ *έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.*
(γ) $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ *έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.*

Υπόδειξη. (α) Η εξίσωση $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax - bx - cx$. Παρατηρήστε ότι $f(0) = f(1) = 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle βρίσκουμε μια ρίζα της εξίσωσης στο $(0, 1)$.

(β) Η εξίσωση $6x^4 - 7x + 1 = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 6x^4 - 7x + 1$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2 < x_3$ ώστε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ (δηλαδή, ότι η εξίσωση έχει περισσότερες από δύο πραγματικές ρίζες). Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την f στα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$, βρίσκουμε $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3$ ώστε $f'(y_1) = f'(y_2) = 0$. Δηλαδή, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο (διαφορετικές) πραγματικές ρίζες. Όμως, $f'(x) = 24x^3 - 7 = 0$ αν και μόνο αν $x = \sqrt[3]{7/24}$, δηλαδή η $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα η αρχική εξίσωση έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

(γ) Η εξίσωση $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 9x^2 + 33x - 8$. Αφού $f(0) = -8 < 0$ και $f(1) = 35 > 0$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Αν υποθέσουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τότε η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα (θεώρημα Rolle). Όμως, $f'(x) = 3x^2+18x+33 = 3(x^2 + 6x + 11) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (ελέγξτε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική). Αυτό είναι άτοπο, άρα η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

Από τα παραπάνω, η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

15. *Δείξτε ότι η εξίσωση $x^n + ax + b = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες αν ο n είναι άρτιος και το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες αν ο n είναι περιττός.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f(x) = x^n+ax+b$ και υποθέτουμε πρώτα ότι ο $n \geq 4$ είναι άρτιος (για $n = 2$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Έστω ότι η $f(x) = 0$ έχει τρείς διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Από το θεώρημα Rolle, η $f'(x) = nx^{n-1} + a = 0$ έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Αυτό είναι άτοπο: ο $n-1$ είναι περιττός, άρα $nx^{n-1}+a = 0$ αν και μόνο αν $x = \sqrt[n-1]{-a/n}$ (μοναδική πραγματική ρίζα).

Έστω τώρα ότι ο $n \geq 3$ είναι περιττός. Τότε, ο $n - 1$ είναι άρτιος και η $nx^{n-1} + a = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες: τις $\pm \sqrt[n-1]{-a/n}$ αν $a < 0$, την $x = 0$ αν $a = 0$, καμία αν $a > 0$. Άρα, η $f(x) = 0$ έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες (εξηγήστε γιατί, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Rolle).

16. *Έστω $a_1 < \cdots < a_n$ στο $\mathbb{R}$ και έστω $f(x) = (x - a_1)\cdots(x - a_n)$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς $n - 1$ λύσεις.*

Υπόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι η $f'(x) = 0$ έχει n διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle βλέπουμε ότι η $f''(x) = 0$ έχει $n - 1$ διαφορετικές πραγματικές ρίζες, και, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, ότι η $f^{(n)}(x) = 0$ έχει (τουλάχιστον) μία πραγματική ρίζα. Όμως, $f^{(n)}(x) = n! \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα, η $f'(x) = 0$ έχει το πολύ $(n - 1)$ πραγματικές ρίζες. Παρατηρούμε τώρα ότι: για κάθε $i = 1, \ldots, n - 1$ έχουμε $f(a_i) = f(a_{i+1}) = 0$, οπότε το θεώρημα Rolle δείχνει ότι υπάρχει $y_i \in (a_i, a_{i+1})$ ώστε $f'(y_i) = 0$. Τα $y_1, \ldots, y_{n-1}$ είναι διαφορετικά ανά δύο γιατί τα (a_i, a_{i+1}) είναι ξένα ανά δύο (διαδοχικά) διαστήματα. Άρα, η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον $n - 1$ πραγματικές ρίζες.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς $n - 1$ πραγματικές ρίζες.

17. *Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x + \frac{3}{x^2}, \qquad f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \qquad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

θεωρώντας σαν πεδίο ορισμού τους το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο μπορούν να οριστούν.

18. (α) *Δείξτε ότι: από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή διαγώνιο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.*

(β) *Δείξτε ότι: από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.*

Υπόδειξη. (α) Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα ab με την υπόθεση $a^2+b^2=d^2$, όπου $d>0$ (εξηγήστε γιατί). Παρατηρήστε ότι

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{d^2}{2}$$

με ισότητα αν και μόνο αν $a=b\ (=d/\sqrt{2})$.

Άλλος τρόπος. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f:[0,d]\to\mathbb{R}$ με $f(a)=a\sqrt{d^2-a^2}$ ή, ισοδύναμα, την $g=f^2:[0,d]\to\mathbb{R}$ με $g(a)=a^2(d^2-a^2)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\max(g)=f(d/\sqrt{2})$ (εξηγήστε γιατί). Παραγωγίζοντας, έχουμε $g'(a)=2ad^2-4a^3=2a(d^2-2a^2)$. Έπεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,d/\sqrt{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[d/\sqrt{2},d]$, άρα παίρνει τη μέγιστη τιμή της αν και μόνο αν $a=d/\sqrt{2}$.

(β) Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα ab με την υπόθεση $a+b=d$, όπου $d>0$ (εξηγήστε γιατί). Παρατηρήστε ότι

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{d^2}{4}$$

με ισότητα αν και μόνο αν $a=b\ (=d/2)$.

Άλλος τρόπος. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g:[0,d]\to\mathbb{R}$ με $g(a)=a(d-a)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\max(g)=f(d/2)$ (εξηγήστε γιατί). Παραγωγίζοντας, έχουμε $g'(a)=d-2a$. Έπεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,d/2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[d/2,d]$, άρα παίρνει τη μέγιστη τιμή της αν και μόνο αν $a=d/2$.

19. *Βρείτε τα σημεία της υπερβολής $x^2-y^2=1$ που έχουν ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(0,1)$.*

Υπόδειξη. Έστω (x,y) ένα σημείο της υπερβολής $x^2-y^2=1$. Το τετράγωνο της απόστασης του (x,y) από το $(0,1)$ ισούται με $x^2+(y-1)^2=1+y^2+(y-1)^2=2y^2-2y+2$. Παρατηρήστε ότι για κάθε $y\in\mathbb{R}$ υπάρχουν δύο τιμές του x (οι $\pm\sqrt{1+y^2}$) ώστε το (x,y) να ανήκει στην υπερβολή. Αρκεί λοιπόν (εξηγήστε γιατί) να βρούμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(y)=2y^2-2y+2$. Παραγωγίζοντας, βλέπουμε ότι το $\min(g)$ πιάνεται όταν $y=1/2$, οπότε παίρνουμε δύο σημεία, τα $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

20. *Πάνω σε κύκλο ακτίνας 1 θεωρούμε δύο αντιδιαμετρικά σημεία A,B. Βρείτε τα σημεία Γ του κύκλου για τα οποία το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει τη μέγιστη δυνατή περίμετρο.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A=(1,0)$ και $B=(-1,0)$. Αρκεί να θεωρήσουμε σημεία Γ της μορφής $(\cos x,\sin x)$, όπου $0\leq x\leq\pi$. Αυτά είναι τα σημεία του άνω ημικυκλίου, για το κάτω ημικύκλιο εργαζόμαστε ανάλογα. Παρατηρήστε ότι το μήκος του $A\Gamma$ είναι $2\sin\frac{x}{2}$ και το μήκος του $B\Gamma$ είναι $2\sin\frac{\pi-x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}$. Αρκεί λοιπόν να μεγιστοποιήσουμε την $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $g'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$, συμπεραίνουμε ότι η g παίρνει μέγιστη τιμή όταν $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$, δηλαδή $x = \pi/2$. Άρα, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $\Gamma_1 = (0,1)$ και $\Gamma_2 = (-1,0)$.

21. *Δίνονται πραγματικοί αριθμοί* $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. *Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης* $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}(x^2 - 2a_kx + a_k^2) = nx^2 - 2(a_1+\cdots+a_n)x + (a_1^2+\cdots+a_n^2).$$

Η παράγωγος της f είναι η

$$f'(x) = 2nx - 2(a_1+\cdots+a_n).$$

Έπεται ότι η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο $x_0 = \frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$. Η ελάχιστη τιμή είναι ίση με $\min(f) = (a_1^2+\cdots+a_n^2) - \frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)^2$.

22. *Έστω* $a > 0$. *Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης*

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}$$

είναι ίση με $\frac{2+a}{1+a}$.

Υπόδειξη. Μελετήστε την f χωριστά στα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[0,a]$ και $[a,+\infty)$ (ώστε να «διώξετε» τις απόλυτες τιμές). Παραγωγίζοντας, ελέγξτε ότι η f είναι αύξουσα στο $(-\infty,0]$, φθίνουσα στο $[a,+\infty)$, ενώ στο $[0,a]$ έχουμε ότι η f είναι φθίνουσα στο $[0,a/2]$ και αύξουσα στο $[a/2,a]$.

Συνεπώς, η μέγιστη τιμή της f είναι μία από τις $f(0)$ και $f(a)$. Παρατηρήστε ότι $f(0) = 1 + \frac{1}{1+a} = \frac{2+a}{1+a} = f(a)$. Συνεπώς, $\max(f) = \frac{2+a}{1+a}$.

23. *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[a,b]$ και ότι $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x στο (a,b) για το οποίο οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα $(x,f(x))$ και $(x,g(x))$ είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.*

Υπόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $x \in (a,b)$ ώστε $f'(x) = g'(x)$ (αυτό σημαίνει ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα $(x,f(x))$ και $(x,g(x))$ είναι παράλληλες ή ταυτίζονται). Θεωρούμε τη συνάρτηση $h = f - g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αφού

$f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$, έχουμε $h(a) = h(b) = 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle, βρίσκουμε $x \in (a,b)$ ώστε $h'(x) = 0$, δηλαδή, $f'(x) - g'(x) = 0$.

24. *Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Δείξτε ότι ανάμεσα σε δύο ρίζες της $f(x) = 0$ βρίσκεται μια ρίζα της $g(x) = 0$, και αντίστροφα.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο (a,b) ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$, και ότι η g δεν μηδενίζεται στο (x_1, x_2) (απαγωγή σε άτοπο). Εφαρμόζοντας την υπόθεση $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ στα x_1 και x_2, βλέπουμε ότι $f'(x_1)g(x_1) \neq 0$ και $f'(x_2)g(x_2) \neq 0$, άρα η g δεν μηδενίζεται στα x_1, x_2. Με άλλα λόγια, η g δεν μηδενίζεται στο $[x_1, x_2]$.

Τότε, μπορούμε να ορίσουμε την $h := \frac{f}{g} : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$. Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), και $h(x_1) = h(x_2) = 0$ (εξηγήστε γιατί). Από το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x \in (x_1, x_2)$ ώστε

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = 0.$$

Αυτό είναι άτοπο: αφού $x \in (a,b)$, έχουμε $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$, άρα $h'(x) \neq 0$.

25. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b), με $f(a) = f(b)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in (a,b)$ ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.*

Υπόδειξη. Θέτουμε $\gamma = \frac{a+b}{2}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στα $[a,\gamma]$ και $[\gamma, b]$ βρίσκουμε $x_1 \in (a,\gamma)$ και $x_2 \in (\gamma, b)$ που ικανοποιούν τις

$$f'(x_1) = \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} \quad \text{και} \quad f'(x_2) = \frac{f(b) - f(\gamma)}{b - \gamma}.$$

Χρησιμοποιώντας την $\gamma - a = \frac{b-a}{2} = b - \gamma$ και την $f(a) = f(b)$, ελέγξτε ότι $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

26. *Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim\limits_{y \to +\infty} f'(y) = 0$, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $y > M$ ισχύει $|f'(y)| < \varepsilon$. Έστω $x > M$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x, x+1]$: υπάρχει $y_x \in (x, x+1)$ ώστε

$$f(x+1) - f(x) = f'(y_x)((x+1) - x) = f'(y_x).$$

Όμως $y_x > x > M$, άρα $|f'(y_x)| < \varepsilon$. Δηλαδή,

$$|f(x+1) - f(x)| < \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$.

27. *Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $|f'(x)|\leq\frac{1}{x}$ για κάθε $x>1$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}[f(x+\sqrt{x})-f(x)]=0$.*

Υπόδειξη. Έστω $x>1$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x,x+\sqrt{x}]$: υπάρχει $y_x\in(x,x+\sqrt{x})$ ώστε

$$f(x+\sqrt{x})-f(x)=f'(y_x)\sqrt{x}.$$

Όμως $y_x>x>1$, άρα $|f'(y_x)|\leq\frac{1}{y_x}<\frac{1}{x}$. Δηλαδή,

$$|f(x+\sqrt{x})-f(x)|<\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Έπεται ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x+\sqrt{x})-f(x))=0$.

28. *Έστω f,g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[0,a]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,a)$. Υποθέτουμε ότι $f(0)=g(0)=0$ και $f'(x)>0$, $g'(x)>0$ στο $(0,a)$.*

(α) *Αν η f' είναι αύξουσα στο $(0,a)$, δείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0,a)$.*

(β) *Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0,a)$, δείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0,a)$.*

Υπόδειξη. (α) Η παράγωγος της $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ στο $x\in(0,a)$ ισούται με

$$h'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[0,x]$ για την f, βρίσκουμε $\xi\in(0,x)$ ώστε

$$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x.$$

Όμως η f' είναι αύξουσα και $\xi<x$, άρα $f'(\xi)\leq f'(x)$. Συνεπώς, $f(x)\leq f'(x)x$. Έπεται ότι $h'\geq 0$ στο $(0,a)$, άρα η h είναι αύξουσα.

(β) Η συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι καλά ορισμένη στο $(0,a)$. Πράγματι, παρατηρήστε ότι η $\frac{f'}{g'}$ ορίζεται καλά στο $(0,a)$ και ότι $g'>0$ (από την υπόθεση). Αυτό έχει σαν συνέπεια και την $g(x)>0$ στο $(0,a)$ (δείτε την ερώτηση κατανόησης 4). Έχουμε

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[0,x]$ για την $z_x(t)=f(t)g(x)-g(t)f(x)$, βρίσκουμε $\xi\in(0,x)$ ώστε

$$0=z_x(x)-z_x(0)=f'(\xi)g(x)-g'(\xi)f(x).$$

Αφού η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα και $\xi < x$, παίρνουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \leq \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Συνεπώς, $f'(x)g(x) - g'(x)f(x) \geq 0$. Έπεται ότι $h' \geq 0$ στο $(0, a)$, άρα η h είναι αύξουσα.

Ασκήσεις: εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση – τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Ομάδα Α′

29. (α) *Αν $0 < a < 1$ ή $a > 1$, δείξτε ότι*

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

(β) *Δείξτε ότι, για κάθε $a > 0$,*

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Επίσης, η a^x είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η $\log_a x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

30. (α) *Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq 1 + x$.*
(β) *Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει*

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1.$$

Υπόδειξη. (α) Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x - 1 - x$. Η παράγωγος $g'(x) = e^x - 1$ της g είναι αρνητική στο $(-\infty, 0)$ και θετική στο $(0, +\infty)$. Άρα, η g έχει ολικό ελάχιστο στο 0. Δηλαδή, $g(x) \geq g(0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) Από την $e^{x-1} \geq x$ έπεται ότι

$$x - 1 = \ln\left(e^{x-1}\right) \geq \ln x.$$

Εφαρμόζοντας αυτή την ανισότητα για τον $\frac{1}{x} > 0$, παίρνουμε

$$-\ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1,$$

δηλαδή

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x.$$

31. *Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\ln x \leq n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \leq \sqrt[n]{x}\, \ln x.$$

Συμπεράνατε ότι $\lim_{n\to\infty} n\,(\sqrt[n]{x}-1)=\ln x$ *για* $x>0$.

Υπόδειξη. Έστω $x>0$ και έστω $n\in\mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα της Άσκησης 30 για τον θετικό αριθμό $\sqrt[n]{x}$, παίρνουμε

$$1-\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\leq \ln(\sqrt[n]{x})\leq \sqrt[n]{x}-1,$$

δηλαδή

$$\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[n]{x}}\leq \frac{1}{n}\ln x\leq \sqrt[n]{x}-1.$$

Έπεται ότι

$$\ln x\leq n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\leq \sqrt[n]{x}\,\ln x.$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1$, το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δείχνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)=\ln x.$$

32. (α) *Δείξτε ότι για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=x.$$

(β) *Δείξτε ότι για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x.$$

Υπόδειξη. (α) Εφαρμόζοντας την ανισότητα της Άσκησης 530 για τον θετικό αριθμό $1+\frac{x}{n}$ παίρνουμε

$$\frac{x/n}{1+(x/n)}\leq \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\leq\frac{x}{n}.$$

Άρα,

$$\frac{x}{1+\frac{x}{n}}\leq n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\leq x.$$

Το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δείχνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=x.$$

(β) Από το (α) έχουμε

$$\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)\to x$$

όταν το $n \to \infty$. Η $y \mapsto e^y$ είναι συνεχής συνάρτηση, οπότε η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)} \to e^x$$
όταν το $n \to \infty$.

33. *Μελετήστε τη συνάρτηση*
$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$
στο $(0, +\infty)$ *και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. Ποιός είναι μεγαλύτερος, ο* e^π *ή ο* π^e*;*

Υπόδειξη. Η παράγωγος της f είναι η
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$
Δηλαδή, $f'(x) > 0$ αν $\ln x < 1$ και $f'(x) < 0$ αν $\ln x > 1$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Αφού $\pi > 3 > e$ έχουμε $f(\pi) < f(e)$, δηλαδή
$$\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}.$$
Έπεται ότι
$$\ln(\pi^e) = e \ln \pi < \pi \ln e = \ln(e^\pi).$$
Άρα, $\pi^e < e^\pi$.

34. *Δείξτε ότι οι συναρτήσεις* ln *και* exp *ικανοποιούν τα εξής:* (α) *για κάθε* $s > 0$,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^s} = +\infty$$
και (β)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^s} = 0.$$
Δηλαδή, η exp *αυξάνει στο* $+\infty$ *ταχύτερα από οποιαδήποτε (μεγάλη) δύναμη του* x*, ενώ η* ln *αυξάνει στο* $+\infty$ *βραδύτερα από οποιαδήποτε (μικρή) δύναμη του* x*.*

Υπόδειξη. Εφαρμόστε τον κανόνα του l'Hospital.

35. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα* $f'(x) = cf(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$*, όπου* c *μια σταθερά. Δείξτε ότι υπάρχει* $a \in \mathbb{R}$ *ώστε* $f(x) = ae^{cx}$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$*.*

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-cx}$ στο $\mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι
$$g'(x) = f'(x)e^{-cx} - cf(x)e^{-cx} = e^{-cx}(f'(x) - cf(x)) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = f(x)e^{-cx} = a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι $f(x) = ae^{cx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

36. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b), ώστε $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι: για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $g_\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ με*

$$g_\lambda(x) := f'(x) + \lambda f(x)$$

έχει μια ρίζα στο διάστημα (a,b).

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $h_\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $h_\lambda(x) = e^{\lambda x} f(x)$. Η h_λ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b), και $h_\lambda(a) = h_\lambda(b) = 0$. Από το θεώρημα του Rolle, η εξίσωση $h'_\lambda(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (a,b). Αφού

$$h'_\lambda(x) = e^{\lambda x}(f'(x) + \lambda f(x)) = e^{\lambda x} g_\lambda(x),$$

έπεται ότι η

$$g_\lambda(x) := f'(x) + \lambda f(x)$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a,b).

37. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f'(\xi) > f(\xi)$.*

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$ στο (a,b). Σταθεροποιήστε $c \in (a,b)$. Αφού $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to b^-} e^{-x} = e^{-b} > 0$, ισχύει

$$\lim_{x\to b^-} g(x) = \lim_{x\to b^-} e^{-x} f(x) = +\infty.$$

Άρα, υπάρχει $d \in (c,b)$ ώστε $g(c) < g(d)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής στο $[c,d]$, υπάρχει $\xi \in (c,d)$ ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(d) - g(c)}{d - c} > 0.$$

Όμως,

$$g'(\xi) = e^{-\xi}(f'(\xi) - f(\xi)).$$

Άρα, $f'(\xi) > f(\xi)$ (και $\xi \in (a,b)$, αφού $a < c < \xi < d < b$).

38. *Δείξτε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει*

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$ στο $[0, \pi/2]$. Παρατηρήστε ότι $g(0) = g(\pi/2) = 0$. Επίσης,

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

και
$$g''(x) = -\sin x < 0 \quad \text{στο} \quad (0, \pi/2).$$
Άρα, η g είναι κοίλη. Έπεται ότι: για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει
$$g(x) \geq \frac{2x}{\pi} g(\pi/2) + \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) g(0) = 0.$$
Δηλαδή,
$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}.$$

39. (α) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*
(β) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. (α) Θεωρήστε την $g = f^2 + (f')^2$. Τότε,
$$g' = 2ff' + 2f'f'' = 2f'(f + f'') = 0,$$
δηλαδή η g είναι σταθερή. Αφού $g(0) = [f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 0$, συμπεραίνουμε ότι
$$g(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 0$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, $f(x) = f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \cos x$ ικανοποιεί τις $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ και $g''(x) + g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το (α) έπεται ότι $f(x) - \cos x = g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

40. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση*
$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$
(α) *Δείξτε ότι: για κάθε $x \geq 0$, $f'''(x) \geq 0$, $f''(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$.*
(β) *Δείξτε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$ και, για κάθε $x \geq 0$,*
$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

Υπόδειξη. (α) Υπολογίστε τις παραγώγους:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, \\ f''(x) &= -\sin x + x, \\ f'''(x) &= -\cos x + 1. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι: $f''' \geq 0$, άρα η f'' είναι αύξουσα και $f''(0) = 0$, άρα $f'' \geq 0$ στο $[0, +\infty)$, άρα η f' είναι αύξουσα και $f'(0) = 0$, άρα $f' \geq 0$ στο $[0, +\infty)$.

(β) Γνωρίζουμε ότι $\sin x \leq x$ για κάθε $x \geq 0$. Από το (α), για την $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ έχουμε $f' \geq 0$ στο $[0, +\infty)$ άρα $f(x) \geq f(0) = 0$ για κάθε $x \geq 0$. Συνεπώς,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

Για την $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$ μπορείτε (μεταξύ άλλων) να χρησιμοποιήσετε την

$$1 - \cos x = 2\sin^2(x/2) \leq 2(x/2)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

Η ανισότητα προκύπτει αν υψώσετε στο τετράγωνο την $|\sin(x/2)| \leq |x/2|$.

41. (α) *Δείξτε ότι η εξίσωση* $\tan x = x$ *έχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα της μορφής* $I_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

(β) *Έστω* a_k *η λύση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα* I_k, $k \in \mathbb{N}$. *Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο* $\lim_{k\to\infty}(a_{k+1} - a_k)$ *και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.*

Υπόδειξη. (α) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f_k : I_k \to \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \tan x - x$. Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{x\to(k\pi-\frac{\pi}{2})^+} f_k(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to(k\pi+\frac{\pi}{2})^+} f_k(x) = +\infty.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μπορείτε να δείξετε ότι υπάρχει $a_k \in I_k$ ώστε $f_k(a_k) = \tan a_k - a_k = 0$. Η λύση είναι μοναδική γιατί η $f_k(x) = \tan x - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο I_k: παρατηρήστε ότι $f_k'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$ αν $x \neq k\pi$ και $= 0$ στο σημείο $k\pi$.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Από την $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ έπεται ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε αν $x > M$ τότε $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan x < \varepsilon$.

Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $k\pi - \frac{\pi}{2} > M$. Τότε, αν θεωρήσουμε τη λύση a_k της εξίσωσης $\tan x = x$ στο I_k, έχουμε $a_k > M$ και $\arctan a_k = a_k - k\pi$. Άρα,

$$0 < \frac{\pi}{2} - (a_k - k\pi) < \varepsilon.$$

Όμοια,

$$0 < \frac{\pi}{2} - (a_{k+1} - (k+1)\pi) < \varepsilon.$$

Έπεται ότι

$$|a_{k+1} - a_k - \pi| < \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{k+1} - a_k) = \pi$.

Ασκήσεις – Ομάδα Β′

42. *Δίνονται πραγματικοί αριθμοί* $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$*. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης* $g(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$.

Υπόδειξη. Μελετήστε την g χωριστά στα διαστήματα $(-\infty, a_1]$, $[a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$ και $[a_n, +\infty)$ (για να «διώξετε» τις απόλυτες τιμές). Θα χρειαστεί να διακρίνετε τις περιπτώσεις n περιττός και n άρτιος.

(α) Αν $n = 2s - 1$ για κάποιον $s \in \mathbb{N}$, ελέγξτε ότι η g είναι φθίνουσα στο $(-\infty, a_s]$ και αύξουσα στο $[a_s, +\infty)$. Συνεπώς,

$$\min(g) = \sum_{k=1}^{2s-1} |a_s - a_k| = \sum_{k=s+1}^{2s-1} a_k - \sum_{k=1}^{s-1} a_k.$$

(β) Αν $n = 2s$ για κάποιον $s \in \mathbb{N}$, ελέγξτε ότι η g είναι φθίνουσα στο $(-\infty, a_s]$, σταθερή στο $[a_s, a_{s+1}]$, και αύξουσα στο $[a_{s+1}, +\infty)$. Συνεπώς,

$$\min(g) = \sum_{k=1}^{2s} |a_s - a_k| = \sum_{k=1}^{2s} |a_{s+1} - a_k| = \sum_{k=s+1}^{2s} a_k - \sum_{k=1}^{s} a_k.$$

43. *Έστω* $n \in \mathbb{N}$ *και έστω* $f(x) = (x^2 - 1)^n$*. Δείξτε ότι η εξίσωση* $f^{(n)}(x) = 0$ *έχει ακριβώς* n *διαφορετικές λύσεις, όλες στο διάστημα* $(-1, 1)$.

Υπόδειξη. (α) Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle δείξτε επαγωγικά το εξής: για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$, η εξίσωση $f^{(k)}(x) = 0$ έχει k διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $(-1, 1)$ και $f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.

(β) Δείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x) = 0$ έχει n διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $(-1, 1)$.

(γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x) = 0$ έχει το πολύ n διαφορετικές λύσεις. [*Υπόδειξη:* Αν η $f^{(n)}(x) = 0$ είχε $n + 1$ διαφορετικές λύσεις, τότε η $f^{(2n)}(x) = 0$ θα είχε λύση.]

44. *Να βρεθούν όλοι οι* $a > 1$ *για τους οποίους η ανισότητα* $x^a \leq a^x$ *ισχύει για κάθε* $x > 1$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ πρέπει να έχει μέγιστο στο a. Η συνάρτηση αυτή μελετήθηκε στην Άσκηση 33.

45. *Έστω* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση με* $f(0) = 0$*. Υποθέτουμε ότι η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $(0, 1)$ *και* $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$ *για κάθε* $x \in (0, 1)$*. Δείξτε ότι η* f *είναι σταθερή και ίση με* 0 *στο* $[0, 1]$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-2x} f(x)$. Αφού $g'(x) = e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) \leq 0$, η g είναι φθίνουσα. Όμως, $g(0) = 0$ και $g \geq 0$ (διότι $f(0) = 0$ και $f \geq 0$ από τις υποθέσεις). Αναγκαστικά, $g \equiv 0$ και έπεται ότι $f \equiv 0$ στο $[0, 1]$.

46. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.*

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-x}f(x)$. Τότε, $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα. Τότε, για κάθε $x > 0$ έχουμε $g(x) > g(0) = 0$, δηλαδή $e^{-x}f(x) > 0$. Έπεται ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

47. *Έστω $\alpha > 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\alpha e^x = 1 + x + x^2/2$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.*

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-x}(1 + x + x^2/2)$. Τότε,

$$g'(x) = e^{-x}(1 + x) - e^{-x}(1 + x + x^2/2) = -\frac{x^2e^{-x}}{2}.$$

Αφού $g'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, η g είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. Συνεπώς, η g παίρνει κάθε θετική τιμή α ακριβώς μία φορά (εξηγήστε γιατί). Έπεται το ζητούμενο.

48. *Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 1$,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$

Υπόδειξη. Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f'(y)$
$leqM$ για κάθε $y > 0$. Έστω $x > 1$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $y_x \in (1, x)$ ώστε

$$|f(x) - f(1)| = |f'(y_x)(x - 1)| \leq M(x - 1).$$

Τότε, για κάθε $x > 1$,

$$\frac{|f(x)|}{x^\alpha} \leq \frac{|f(x) - f(1)|}{x^\alpha} + \frac{|f(1)|}{x^\alpha} \leq M\frac{x - 1}{x^\alpha} + \frac{|f(1)|}{x^\alpha}.$$

Αν $\alpha > 1$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|f(1)|}{x^\alpha} = 0.$$

Συνεπώς, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$ (εξηγήστε γιατί).

49. *Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$ και $f'(x) \geq a$ για κάθε $x \in (0, 1]$.*

Υπόδειξη. Έστω $a > 0$. Υποθέστε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$ και $f'(x) \geq a$ για κάθε $x \in (0, 1]$.

(α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[0, x]$ δείξτε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ έχουμε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq a.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$, μπορείτε να καταλήξετε σε άτοπο.

50. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f' είναι ασυνεχής σε κάποιο σημείο $x_0 \in (a,b)$, δείξτε οτι η ασυνέχεια της f' στο x_0 είναι ουσιώδης (δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$).*

Υπόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι για κάποιο $x_0 \in (a,b)$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell > f'(x_0),$$

και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

(α) Θεωρούμε $m \in \mathbb{R}$ ο οποίος ικανοποιεί την $\ell > m > f'(x_0)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ και $f'(x) > m$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

(β) Δείξτε ότι η f' δεν έχει την ιδιότητα Darboux στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και καταλήξτε έτσι σε άτοπο.

51. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to b^-} f'(x)$ τότε είναι ίσο με $+\infty$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $-\infty \leq \lim\limits_{x \to b^-} f'(x) < +\infty$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $\ell \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f'(y) \leq \ell$ για κάθε $y \in (x_0, b)$.

(β) Θεωρήστε $x \in (x_0, b)$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x_0, x]$ δείξτε ότι

$$f(x) \leq f(x_0) + \ell(x - x_0) \leq f(x_0) + \ell(b - a).$$

(γ) Από το (β) η f είναι άνω φραγμένη στο $[x_0, b)$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ μπορείτε να καταλήξετε σε άτοπο.

52. *Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ τότε είναι ίσο με 0.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x > M$ να έχουμε $|f'(x)| > \frac{|\ell|}{2}$.

(β) Θεωρήστε $x > M$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[M, x]$ δείξτε ότι

$$|f(x) - f(M)| \geq \frac{|\ell|(x - M)}{2}.$$

(γ) Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x) - f(M)| = |L - f(M)|$. Από την άλλη πλευρά, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|\ell|(x-M)}{2} = +\infty$. Από το (β) μπορείτε να καταλήξετε σε άτοπο.

(δ) Υποθέτοντας ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \pm\infty$, μπορείτε πάλι να δείξετε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x > M$ να έχουμε $|f'(x)| > 1$. Συνεπώς, επαναλαμβάνοντας τα βήματα (β) και (γ), καταλήγετε σε άτοπο.