Απειροστικός Λογισμός Ι (2009–10)
Επαναληπτικές Ασκήσεις

(Ι) 24-11-09 και 26-11-09

1. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων:

$$\begin{aligned} A &= \left\{(-1)^n\frac{n}{n+1}\,:\, n\in\mathbb{N}\right\} \\ B &= \left\{\frac{1}{n}+(-1)^n\,:\, n=1,2,3,\dots\right\}. \end{aligned}$$

2. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων:

$$\begin{aligned} A &= \left\{\sqrt{n}-[\sqrt{n}]\,:\, n\in\mathbb{N}\right\} \\ B &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3n+1},\frac{1}{3n}\right] \\ C &= \left\{\frac{m}{n}\,:\, m,n\in\mathbb{N}, m<2n\right\} \\ D &= \left\{\frac{m}{|m|+n}\,:\, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}. \end{aligned}$$

3. Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:
(α) $\sup A\leq x$ αν και μόνο αν $a\leq x$ για κάθε $a\in A$.
(β) $x\leq \sup A$ αν και μόνο αν για κάθε $t<x$ υπάρχει $a\in A$ ώστε $t<a$.

4. Έστω $A\subset(0,+\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\inf A=0$ και ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf του συνόλου

$$B=\left\{\frac{x}{x+1}\,:\, x\in A\right\}.$$

5. Έστω A,B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι:
(α) για κάθε $a\in A$ και για κάθε $b\in B$ ισχύει $a\leq b$, και
(β) για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν $a\in A$ και $b\in B$ ώστε $b-a<\varepsilon$.
Δείξτε ότι $\sup A=\inf B$.

6. Έστω A,B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\sup A\leq\sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $a\in A$ και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $b\in B$ ώστε $a-\varepsilon<b$.

7. Έστω $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι: για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει ακέραιος $k_n\in\mathbb{Z}$ ώστε $\left|x-\frac{k_n}{\sqrt{n}}\right|<\frac{1}{\sqrt{n}}$.

8. Έστω $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι: για κάθε $N\geq 2$ υπάρχουν ακέραιοι m και n, με $0<n\leq N$, ώστε $|nx-m|<\frac{1}{N}$.

9. Δείξτε ότι οι αριθμοί $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ και $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

10. Δείξτε ότι αν ο φυσικός αριθμός n δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, τότε ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος.

(II) 1-12-09 και 3-12-09

11. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριο της:

$$\alpha_n = \frac{10^n}{n!}\ , \quad \beta_n = \frac{n^n}{n!}\ , \quad \gamma_n = \frac{(n!)^3 5^n}{(3n)!}\ , \quad \delta_n = \frac{n^8}{5^n}.$$

$$\varepsilon_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n\ , \quad \zeta_n = \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}\ , \quad \eta_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 7^n}.$$

$$\theta_n = \sqrt[n]{3 + \frac{1}{n}}, \quad \kappa_n = \frac{\sin n}{n}\ , \quad \lambda_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}.$$

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(n^2\right), \quad \nu_n = \frac{2n^2 - 7n + 6}{8n^2 + 5n + 4}\ , \quad \xi_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}.$$

$$\rho_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}\ , \quad \sigma_n = \frac{3^n + (-1)^n n}{3^n - n}, \quad \tau_n = n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \right).$$

12. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad c_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

και

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad e_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n.$$

13. Ορίζουμε μια ακολουθία (α_n) με $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n^2+1}{2\alpha_n+2}$, $\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$. Δείξτε ότι:
(α) Η (α_n) είναι αύξουσα.
(β) $\alpha_n \to 1$.

14. Θεωρούμε την ακολουθία (α_n) που ορίζεται από τις $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n+3}{5}$, $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και υπολογίστε το όριο της.

15. Έστω $0 < a_1 < b_1$. Ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες θέτοντας

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) Δείξτε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) φθίνουσα.
(β) Δείξτε ότι οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

16. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq k\}$ είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

17. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία με την ιδιότητα

$$b_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to a.$$

Δείξτε ότι $a_n \to a$.

18. (α) Δείξτε ότι: αν $a_n > 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

(β) Προσδιορίστε τα όρια των ακολουθιών:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^{1/n}\\ \beta_n &= \frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{1/n}\\ \gamma_n &= \left[\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n}\end{aligned}$$

19. Δώστε παράδειγμα δύο ακολουθιών (x_n), (y_n) με θετικούς όρους, οι οποίες ικανοποιούν τα εξής:

(α) $x_n \to +\infty$ και $y_n \to +\infty$.

(β) Η ακολουθία $\frac{x_n}{y_n}$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.

20. Έστω (a_n), (b_n) δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(α) Αν, επιπλέον, η (b_n) είναι φραγμένη, δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθιών για τις οποίες $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ αλλά δεν ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

(III) 8-12-09 και 10-12-09

21. Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: $f(x) = x^2$ για κάθε ρητό $x \in (0,1)$. Να βρεθεί το $f\big(\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

22. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -x & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ και ότι αν $x_0 \neq 0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

23. Εξετάστε αν είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις:

(α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

(β) $f_k : [-1,0] \to \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $(k = 0,1,2,\ldots)$

(γ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

24. Έστω $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$ και ότι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

25. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

26. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(\frac{m}{2^n}) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

27. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $A = \{x \in [a,b] : f(x) = 0\}$. Αν $A \neq \emptyset$, δείξτε ότι $\sup A \in A$ και $\inf A \in A$.

28. Έστω $a \in [0,\pi]$. Ορίζουμε ακολουθία με $a_1 = a$ και $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Δείξτε ότι $a_n \to 0$.

29. (α) Έστω $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Αν $\lim_{n\to\infty} f(a+t_n)=L$ για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία (t_n) με $t_n\to 0$, τότε $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$.

(β) Σωστό ή λάθος; Έστω $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Αν $\lim_{n\to\infty} f\left(a+\frac{1}{n}\right)=L$ τότε $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$.

30. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0\in(a,b)$. Δείξτε ότι το $f(x_0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του $f([a,b])$.

(IV) 15-12-09 και 17-12-09

31. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi>0$ ώστε $f(x)\geq\xi$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Ισχύει το συμπέρασμα αν αντικαταστήσουμε το διάστημα $[a,b]$ με το διάστημα $(a,b]$;

32. Έστω $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $\lambda<\mu<\nu$. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{\alpha}{x-\lambda}+\frac{\beta}{x-\mu}+\frac{\gamma}{x-\nu}=0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (λ,μ) και (μ,ν).

33. Έστω $P(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ πολυώνυμο με την ιδιότητα $a_0a_m<0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει θετική πραγματική ρίζα.

34. Υποθέτουμε ότι η $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0\in[a,+\infty)$ με $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in[a,+\infty)$.

35. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Δείξτε ότι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

36. Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση γνησίως αύξουσα και συνεχής. Δείξτε ότι

$$f((\alpha,\beta))=(\lim_{x\to\alpha^+} f(x),\lim_{x\to\beta^-} f(x)).$$

37. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n\in[0,1]$ ώστε $f(x_n)\to 0$. Τότε, υπάρχει $x_0\in[0,1]$ ώστε $f(x_0)=0$.

38. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a<b$ και ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[0,+\infty)$ με $x_n\to+\infty$, $y_n\to+\infty$ και $f(x_n)\to a$, $f(y_n)\to b$. Δείξτε ότι: για κάθε $c\in(a,b)$ υπάρχει ακολουθία (z_n) στο $[0,+\infty)$ με $z_n\to+\infty$ και $f(z_n)\to c$.

39. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $|f(x)-f(y)|\geq|x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι επί.

40. Έστω $f,g:[0,1]\to[0,1]$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα και $g\circ f=f\circ g$. Δείξτε ότι οι f και g έχουν κοινό σταθερό σημείο: υπάρχει $y\in[0,1]$ ώστε $f(y)=y$ και $g(y)=y$.

(V) 12-1-10 και 14-1-10

41. Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, αποδείξτε πλήρως ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

42. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης η οποία είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο $x_0 = 1$.

43. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x^2 \text{ημ}\frac{1}{x} & , \text{αν } x \neq 0 \\ \alpha & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

(α) Βρείτε την τιμή του α για την οποία η f είναι συνεχής στο 0.

(β) Γι' αυτή την τιμή του α, βρείτε την $f'(x)$ για $x = 0$ και για $x \neq 0$.

(γ) Για την ίδια τιμή του α, εξετάστε αν η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

44. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και εξετάστε αν η συνάρτηση $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, η f δεν είναι μονότονη στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

45. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 0. Δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής σε κάθε $y \neq 0$. Είναι συνεχής στο σημείο 0;

46. (α) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι: $f(x_0) = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

(β) Εξετάστε αν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x| \sin x$.

47. Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = (x-1)^2 g(x)$. Δείξτε ότι:

(α) η f είναι συνεχής στο σημείο 1.

(β) η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 1.

(γ) η $f''(1)$ μπορεί να μην υπάρχει (δώστε παράδειγμα).

48. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ημ}\frac{1}{x} & , \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και εξετάστε αν η f' είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\xi \in (0, \varepsilon)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

49. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , \text{αν } x > 0 \\ 0 & , \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$.

Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν ναι, εξετάστε αν η f' είναι συνεχής.

50. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $g(a) = g(b) = 0$. Υποθέτουμε ότι η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b) και $g''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Δείξτε ότι $g(t) \neq 0$ για κάθε $t \in (a,b)$.