Απειροστικός Λογισμός Ι (2009–10)
Ακολουθίες πραγματικών αριθμών – Ασκήσεις

Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. Κάθε φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

2. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

3. Αν (a_n) είναι μια ακολουθία ακεραίων αριθμών, τότε η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι τελικά σταθερή.

4. Υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

5. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία άρρητων αριθμών συγκλίνει σε άρρητο αριθμό.

6. Κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο κάποιας ακολουθίας άρρητων αριθμών.

7. Αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τότε $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

8. Αν $a_n \to a$ τότε η (a_n) είναι μονότονη.

9. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία. Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

10. Αν η (a_n) είναι φραγμένη και η (b_n) συγκλίνει τότε η $(a_n b_n)$ συγκλίνει.

11. Αν η $(|a_n|)$ συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.

12. Αν $a_n > 0$ και η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

13. $a_n \to +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) που είναι μεγαλύτεροι από M.

14. Αν η (a_n) συγκλίνει και $a_{n+2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η (a_n) είναι σταθερή.

Υπενθύμιση από τη θεωρία

1. Έστω (a_n), (b_n) δύο ακολουθίες με $a_n \to a$ και $b_n \to b$.
(α) Αν $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $a \leq b$.
(β) Αν $a_n < b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $a < b$;
(γ) Αν $m \leq a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $m \leq a \leq M$.

2. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών.
(α) Δείξτε ότι $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $|a_n| \to 0$.
(β) Δείξτε ότι αν $a_n \to a \neq 0$ τότε $|a_n| \to |a|$. Ισχύει το αντίστροφο;
(γ) Έστω $k \geq 2$. Δείξτε ότι αν $a_n \to a$ τότε $\sqrt[k]{|a_n|} \to \sqrt[k]{|a|}$.

3. (α) Έστω $\mu > 1$ και $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $a_{n+1} \geq \mu a_n$ για κάθε n, δείξτε ότι $a_n \to +\infty$.
(β) Έστω $0 < \mu < 1$ και (a_n) ακολουθία με την ιδιότητα $|a_{n+1}| \leq \mu |a_n|$ για κάθε n. Δείξτε ότι $a_n \to 0$.
(γ) Έστω $a_n > 0$ για κάθε n, και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell > 1$. Δείξτε ότι $a_n \to +\infty$.

(δ) Έστω $a_n \neq 0$ για κάθε n, και $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell < 1$. Δείξτε ότι $a_n \to 0$.

4. (α) Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι $\sqrt[n]{a} \to 1$.
(β) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \to a > 0$ τότε $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. Τι μπορείτε να πείτε αν $a_n \to 0$;
(γ) Δείξτε ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Ασκήσεις – Ομάδα Α΄

1. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n < 2.001\} \\ A_2 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n > 2.003\} \\ A_3 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n < 1.98\} \\ A_4 &= \{n \in \mathbb{N} : 1.99997 < a_n < 2.0001\} \\ A_5 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq 2\}. \end{aligned}$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, 5$ εξετάστε αν (α) το A_j είναι πεπερασμένο, (β) το $\mathbb{N} \setminus A_j$ είναι πεπερασμένο.

2. Αποδείξτε με τον ορισμό ότι οι παρακάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο 0:

$$a_n = \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}, \quad b_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}, \quad c_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & , \text{αν } n = 1, 4, 7, 10, 13, \ldots \\ \frac{1}{n^2+1} & , \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

3. Αποδείξτε με τον ορισμό ότι

$$a_n = \frac{n^2 - n}{n^2 + n} \to 1.$$

4. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, δείξτε ότι $a_n > 0$ τελικά.

5. (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $|a| < 1$. Δείξτε ότι η ακολουθία $b_n = a^n$ συγκλίνει στο 0.
(β) Για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$;

6. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{3^n}{n!}\ , \quad \beta_n = \frac{2n-1}{3n+2}\ , \quad \gamma_n = n - \sqrt{n^2 - n}\ , \quad \delta_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n .$$

$$\varepsilon_n = (\sqrt[n]{10} - 1)^n\ , \quad \zeta_n = \frac{n^6}{6^n}\ , \quad \eta_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) .$$

$$\theta_n = \frac{\sin n}{n}\ , \quad \kappa_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}\ , \quad \nu_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}\ , \quad \rho_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n .$$

$$\sigma_n = \frac{n^2}{3n^2 + n + 1}\ , \quad \tau_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}\ , \quad \xi_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}} .$$

7. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{5^n + n}{6^n - n}, \qquad \beta_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}, \qquad \gamma_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n ,$$

$$\delta_n = n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}\right), \qquad \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(n^2\right) ,$$

$$\lambda_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}, \quad \mu_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad \theta_n = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}.$$

8. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ b_n &= \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n} \\ \gamma_n &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} \\ \delta_n &= \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{(n+1)^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{2/3}}. \end{aligned}$$

9. (α) Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$. Δείξτε ότι

$$b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \to \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

(β) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας

$$x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}.$$

10. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία $x_n = \frac{[n\alpha]}{n}$ και, αν ναι, βρείτε το όριο της.

11. Έστω $\alpha > 0$. Δείξτε ότι η ακολουθία $b_n = \frac{1+n\alpha}{(1+\alpha)^n}$ είναι φθίνουσα και προσδιορίστε το όριο της.

12. Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ και $b_n \to +\infty$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $\delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n > \delta$.

(β) Δείξτε ότι $a_n b_n \to +\infty$.

13. Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $a = \sup A$, δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Αν, επιπλέον, το $\sup A$ δεν είναι στοιχείο του A, δείξτε ότι η παραπάνω ακολουθία μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι *γνησίως αύξουσα*.

14. Δείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας ρητών αριθμών, καθώς επίσης και όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας άρρητων αριθμών.

15. Δείξτε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to a > 0$, τότε

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0.$$

16. Δείξτε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to 0$, τότε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

17. Δείξτε ότι η ακολουθία $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. *Υπόδειξη*: Εξετάστε πρώτα αν η (y_n) είναι μονότονη.

18. Θέτουμε $a_1 = \sqrt{6}$ και, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$.

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $(a_n)_n$.

19. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε αν συγκλίνει.

20. Ορίζουμε μια ακολουθία (α_n) με $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n^2+1}{2\alpha_n+2}$, $\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$. Δείξτε ότι:
(α) Η (α_n) είναι αύξουσα.
(β) $\alpha_n \to 1$.

21. Θεωρούμε την ακολουθία (α_n) που ορίζεται από τις $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n+3}{5}$, $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και υπολογίστε το όριο της.

22. Έστω $a > 0$. Θεωρούμε τυχόν $x_1 > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Δείξτε ότι η (x_n), τουλάχιστον από τον δεύτερο όρο της και πέρα, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον $\sqrt{a}$. Βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ασκήσεις – Ομάδα Β΄

23. Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n \to a$. Ορίζουμε μια δεύτερη ακολουθία (b_n) θέτοντας

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Δείξτε ότι $b_n \to a$.

24. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών όρων με $a_n \to a > 0$. Δείξτε ότι

$$b_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \to a \quad \text{και} \quad \gamma_n := \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \to a.$$

25. Έστω (a_n) ακολουθία με $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$. Δείξτε ότι

$$\frac{a_n}{n} \to a.$$

26. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία με την ιδιότητα

$$b_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to a.$$

Δείξτε ότι $a_n \to a$.

27. Δείξτε ότι: αν $a_n > 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

28. Προσδιορίστε τα όρια των ακολουθιών:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^{1/n} \\
\beta_n &= \frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{1/n} \\
\gamma_n &= \left[\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n}
\end{aligned}$$

29. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq k\}$ είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

30. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad c_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

και

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad e_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n.$$

31. Θεωρούμε γνωστό ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$. Δείξτε ότι, για κάθε ρητό αριθμό q, ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n = e^q .$$

32. Έστω $0 < a_1 < b_1$. Ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες θέτοντας

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) Δείξτε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) φθίνουσα.

(β) Δείξτε ότι οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

33. Επιλέγουμε $x_1 = a$, $x_2 = b$ και θέτουμε

$$x_{n+2} = \frac{x_n}{3} + \frac{2x_{n+1}}{3}.$$

Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $y_n = x_{n+1} - x_n$ και βρείτε αναδρομικό τύπο για την (y_n).]

34. Δώστε παράδειγμα δύο ακολουθιών (x_n), (y_n) με θετικούς όρους, οι οποίες ικανοποιούν τα εξής:

(α) $x_n \to +\infty$ και $y_n \to +\infty$.

(β) Η ακολουθία $\frac{x_n}{y_n}$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.

35. Έστω (a_n), (b_n) δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(α) Αν, επιπλέον, η (b_n) είναι φραγμένη, δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθιών για τις οποίες $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ αλλά δεν ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

36. (Λήμμα του Stoltz) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω (b_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Δείξτε ότι αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda,$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda = +\infty$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

37. Ορίζουμε ακολουθία (a_n) με $0 < a_1 < 1$ και $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 1$.