Απειροστικός Λογισμός Ι (2009–10)
Πραγματικοί Αριθμοί – Ασκήσεις

Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \leq \sup A$.

2. Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ο $x \in \mathbb{R}$ είναι άνω φράγμα του A αν και μόνο αν $\sup A \leq x$.

3. Αν το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $\sup A \in A$.

4. Αν A είναι ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ τότε $\sup A \in A$.

5. Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x \in A$ με $a - \varepsilon < x \leq a$.

6. Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x \in A$ με $a - \varepsilon < x < a$.

7. Αν το A είναι μη κενό και $\sup A - \inf A = 1$ τότε υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y = 1$.

8. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος $r \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιούν την $x < r < y$.

Ασκήσεις – Ομάδα Α΄

1. Δείξτε ότι τα παρακάτω ισχύουν στο $\mathbb{R}$:
(α) Αν $x < y + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $x \leq y$.
(β) Αν $x \leq y + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $x \leq y$.
(γ) Αν $|x - y| \leq \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $x = y$.
(δ) Αν $a < x < b$ και $a < y < b$, τότε $|x - y| < b - a$.

2. (α) Αν $|a - b| < \varepsilon$, τότε υπάρχει x ώστε

$$|a - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ και } |b - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(β) Ισχύει το αντίστροφο;
(γ) Έστω ότι $a < b < a + \varepsilon$. Βρείτε όλους τους $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις $|a - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|b - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.

3. Να δειχθεί με επαγωγή ότι ο αριθμός $n^5 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Εξετάστε για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού n ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:
(i) $2^n > n^3$, (ii) $2^n > n^2$, (iii) $2^n > n$, (iv) $n! > 2^n$, (v) $2^{n-1} \leq n^2$.

5. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Αν $0 < a < b$, δείξτε ότι

$$n a^{n-1} \leq \frac{b^n - a^n}{b - a} \leq n b^{n-1}.$$

6. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:
(α) Αν $a > 1$, τότε $a^n > a$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.
(β) Αν $a > 1$ και $m, n \in \mathbb{N}$, τότε $a^m < a^n$ αν και μόνο αν $m < n$.
(γ) Αν $0 < a < 1$, τότε $a^n < a$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.
(δ) Αν $0 < a < 1$ και $m, n \in \mathbb{N}$, τότε $a^m < a^n$ αν και μόνο αν $m > n$.

7. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και έστω $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι:
(α) Αν $a \geq -1$, τότε $(1+a)^n \geq 1+na$.
(β) Αν $0 < a < 1/n$, τότε $(1+a)^n < 1/(1-na)$.
(γ) Αν $0 \leq a \leq 1$, τότε
$$1 - na \leq (1-a)^n \leq \frac{1}{1+na}.$$

8. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:
(α) Αν $-1 < a < 0$, τότε $(1+a)^n \leq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) Αν $a > 0$, τότε $(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

9. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι ανισότητες
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{και} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

10. (α) Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz: αν $a_1, \ldots, a_n$ και $b_1, \ldots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε
$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$
(β) Δείξτε την ανισότητα του Minkowski: αν $a_1, \ldots, a_n$ και $b_1, \ldots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε
$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2}.$$

11. (Ταυτότητα του Lagrange) Αν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, τότε
$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^n (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Lagrange δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

12. (Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου) Αν $x_1, \ldots, x_n > 0$, τότε
$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Επίσης, αν $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, τότε
$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}\right)^n.$$

13. Δείξτε ότι κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

14. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $a_0 \in A$ με την ιδιότητα: για κάθε $a \in A$, $a \leq a_0$. Δείξτε ότι $a_0 = \sup A$. Με άλλα λόγια, αν το A έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι το supremum του A.

15. Έστω A, B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αν $\sup A = \inf B$, δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

16. Έστω A μη κενό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\inf A = \sup A$. Τι συμπεραίνετε για το A;

17. (α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Βρείτε το supremum και το infimum του συνόλου $(a,b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας.

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$. Δείξτε ότι

$$x = y \Longleftrightarrow A_x = A_y.$$

18. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq B$. Δείξτε ότι

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

19. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $A \cup B$ είναι φραγμένο και

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \qquad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Μπορούμε να πούμε κάτι ανάλογο για το $\sup(A \cap B)$ ή το $\inf(A \cap B)$;

20. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leq b$.

21. Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ ώστε

$$a \leq b.$$

Δείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$.

22. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων:
(α) $A = \{x > 0 : 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$, $C = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.
(β) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 0, x^2 + x - 1 < 0\}$, $E = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$, $F = \{x \in \mathbb{Q} : (x-1)(x+\sqrt{2}) < 0\}$.
(γ) $G = \{5 + \frac{6}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{7 - 8n : n \in \mathbb{N}\}$.

23. Βρείτε το supremum και το infimum των συνόλων

$$A = \left\{1 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \quad , \quad B = \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

24. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \left\{\frac{(-1)^n m}{n+m} : \, m, n = 1, 2, \ldots\right\}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$ και $\inf A$. Εξετάστε αν το A έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο.

Ασκήσεις – Ομάδα Β′

25. Δείξτε ότι οι αριθμοί $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

26. Δείξτε ότι αν ο φυσικός αριθμός n δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, τότε ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος.

27. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι:
(α) για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leq b$, και
(β) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

Δείξτε ότι $\sup A = \inf B$.

28. Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a - \varepsilon < b$.

29. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:
(α) για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a < b$.
(β) $A \cup B = \mathbb{R}$.

Δείξτε ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε είτε $A = (-\infty, \gamma)$ και $B = [\gamma, +\infty)$ ή $A = (-\infty, \gamma]$ και $B = (\gamma, +\infty)$.

30. Έστω $A \subset (0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\inf A = 0$ και ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf του συνόλου

$$B = \left\{ \frac{x}{x+1} \, : \, x \in A \right\}.$$

31. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ακέραιος $k_n \in \mathbb{Z}$ ώστε $\left| x - \frac{k_n}{\sqrt{n}} \right| < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

32. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: για κάθε $N \geq 2$ υπάρχουν ακέραιοι m και n, με $0 < n \leq N$, ώστε $|nx - m| < \frac{1}{N}$.

33. Έστω $a_1, \ldots, a_n > 0$. Δείξτε ότι

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

34. Αν $a > 0$, $b > 0$ και $a + b = 1$, τότε

$$2 \left[\left(a + \frac{1}{a} \right)^2 + \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 \right] \geq 25.$$

35. (α) Αν $a_1, \ldots, a_n > 0$, δείξτε ότι

$$(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + \cdots + a_n.$$

(β) Αν $0 < a_1, \ldots, a_n < 1$, τότε

$$\begin{aligned} 1 - (a_1 + \cdots + a_n) &\leq (1 - a_1) \cdots (1 - a_n) \\ &\leq 1 - (a_1 + \cdots + a_n) + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n). \end{aligned}$$

36*. Αν $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ και $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n > 0$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} &\leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \\ &\leq \frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n}. \end{aligned}$$

37*. Έστω $a_1, \ldots, a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Δείξτε ότι υπάρχει $1 \leq m \leq n - 1$ με την ιδιότητα

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \max\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τους αριθμούς

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=m+1}^{n} a_k, \qquad m = 1, \ldots, n-1$$

και

$$b_0 = -\sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Δείξτε ότι δύο διαδοχικοί από αυτούς είναι ετερόσημοι.

38. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \qquad \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

39. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα σύνολα θετικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B, \qquad \inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

40. Έστω A μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $t \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $tA = \{ta : a \in A\}$. Δείξτε ότι

(α) αν $t \geq 0$ τότε $\sup(tA) = t \sup A$ και $\inf(tA) = t \inf A$.

(β) αν $t < 0$ τότε $\sup(tA) = t \inf A$ και $\inf(tA) = t \sup A$.