

Απειροστικός Λογισμός 1

Πέμπτη 2 Φεβρουαρίου 2023

Ωρα 9:00–11:30

Θέμα 1.

- (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο, και $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\alpha = \sup(A)$ αν και μόνο αν: (i) το α είναι άνω φράγμα του A , και (ii) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.
- (β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A τέτοια ώστε $x_n \rightarrow \sup(A)$.
- (γ) Βρείτε το supremum, infimum, μέγιστο και ελάχιστο (αν υπάρχουν) του συνόλου $A = \{q \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} \leq q \leq 5\}$. Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Θέμα 2.

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$(i) a_n = \frac{3^n}{n!}, \quad (ii) b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n + [n^{3/4}])^2},$$

$$(iii) c_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^{2/3}}, \quad (iv) d_n = n(-1)^n - \left(n + \frac{1}{n}\right).$$

Θέμα 3.

Διατυπώστε και αποδείξτε την αρχή μεταφοράς για τη συνέχεια.

Θέμα 4.

- (α) Έστω $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos x$ αν $x \in \mathbb{Q}$, και $f(x) = 1$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Εξετάστε την f ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.
- (β) Έστω $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(0) < g(0)$ και τέτοιες ώστε για κάθε $x \in [0, 1]$ υπάρχει $y \in [0, 1]$ με $g(x) < f(y)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!