Θέματα εξετάσεων Α.Λ.Ι 11-4-2014

Θέμα 1ο (2-μονάδες) Εξετάστε ποιοι από τους κατωθι ισχυρισμούς είναι σωστοί ή λάθος (πλήρης αιτιολόγηση) α) $A \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο μή πεπερασμένο σύνολο και $\sup A = s$. Τότε υπάρχει γνησια αυξουσα ακολουθία $(a_n)_n$ του A ώστε $\lim_n a_n = s$. β) Εστω $A, B \neq \emptyset$ φραγμένο σύνολα μέ $\inf A = \inf B$ και $\sup A = \sup B$. Τότε $A \cap B \neq \emptyset$. γ) Εστω $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ οπου $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ $n = 1, 2, \dots$. Τότε $\sup A = 2$.

ΘΕΜΑ 2ο (2-μονάδες) α) Εάν $a > 0$ νά δειχθεί ότι $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$ β) Εάν $a_n > 0$ γιά καθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_n a_n = a > 0$ νά δειχθεί ότι $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$ γ) Νά υπολογίσετε τα όρια των παρακατω ακολουθιών (άν υπάρχουν) $\beta_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$, $\delta_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ $n \in \mathbb{N}$.

ΘΕΜΑ 3ο (2-μοναδες) Εστω $f(x) = x^3$ αν $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, +\infty)$ και $f(x) = 3x - 2$ αν $x \in \mathbb{Q} \cap [0, +\infty)$ Εξετάστε σε ποια σημεια του $[0, +\infty)$ η f είναι i) συνεχής και ii) παραγωγίσιμη.

ΘΕΜΑ 4ο (2-μονάδες) Εστω $f(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$ γιά $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(0) = 0$. Εξετάστε i) αν η f είναι παραγωγίσιμη και ii) κατά πόσον η παράγωγος είναι συνεχής.

ΘΕΜΑ 5ο (2-μονάδες) α) Εστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και

$$A = \{x \in [a, b] : \exists\, M_x \text{ με } f(y) \leq M_x \text{ για κάθε } y \in [a, x]\}$$

νά δειχθεί ότι $\max A = b$.

β) Εστω ακολουθία $(a_n)_n$ μέ $\lim_n a_n = 5$. Θέτουμε

$A_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_n > 4{,}999\}$, $A_2 = \{n \in \mathbb{N} : a_n > 5{,}0001\}$

$A_3 = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 5{,}0002\}$, $A_4 = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 5\}$. Εξετάστε γιά

$j = 1, 2, 3, 4$ ποιος από τους ακόλουθους ισχυρισμούς είναι σωστός.

i) Τό σύνολο A_j είναι πεπερασμένο ii) Τό συμπλήρωμα του A_j είναι πεπερασμένο

(iii) Τα δεδομένα δεν είναι αρκετα γιά να προκυψει τό i, ii.

ΘΕΜΑ 6ο (2-μονάδες) α) Εστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ συνεχής με $\lim_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to \beta} f(x) = -\infty$ νά δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = 0$.

β) Εστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ μέ $f(0) = 0$ νά δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ετσι ωστε $|f'(x_0)| \geq |f(x)|$ για κάθε $x \in [0, 1]$.